6. Determinanty – použití

Cv. 6.1 Spočtěte následující determinanty a ověřte si intuici pro interpretaci determinantu jako objemu, resp. změny objemu při dané lineární transformaci pro následující matice :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(g) $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cv. 6.2 Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.3 Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.4 Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Cv. 6.5 Které z následujících rovností platí?

(a) $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$

(b) $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$

(c) $\det \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B) - \det(D) \cdot \det(C)$

Cv. 6.6 Dokažte, následující tverzení. Nechť $A \in Z^{n \times n}$. Pak A^{-1} má celočíselné hodnoty právě tehdy, když $\det(A) = \pm 1$.

https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk