

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Řešte metodou nejmenších čtverců a taky pomocí projekce. (Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.)

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete v obou případech stejné řešení?

Cv. 4.2 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

- (a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.
- (b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.
- (c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Cv. 4.3 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 4.4 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

- (a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA ?
- (b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p .
- (c) Dokažte, že P je ortogonální matice.
- (d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q . Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?
- (e) Dokažte, že P^T odpovídá permutaci p^{-1} .
- (f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace AP ?

Cv. 4.5 Rozhodněte o platnosti výroků:

- (a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.
- (b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.