2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)$.

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1,\dots,z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Cv. 2.4 Je pravda, že systém ortogonálních vektorů ve vektorovém prostoru je lineárně nezávislý?
Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Cv. 2.5 Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Cv. 2.6 Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Cv. 2.7 Určete vzdálenost bodu $A = [5,5,3,3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8,-1,1,-2]$ a $C = [4,-2,2,-1]$.