

1. Skalární součin, norma

Cv. 1.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

- (a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
- (b) $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
- (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
- (d) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Cv. 1.2 Pythagorova věta.

- (a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- (b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 1.3 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (a) Ukažte, že $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- (b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
- (c) Dokažte $\text{trace}(A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$.

Cv. 1.4 Dokažte, že pro každé $a_1, \dots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}).$$

Cv. 1.5 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Cv. 1.6 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Cv. 1.7 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

Jsou tyto normy indukované skalárním součinem?