

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA 25.11. a 1.12. Cvičení VIII.

Definice 1 (Skóre grafu). Nechť je $G = (V, E)$ graf s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Posloupnost $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ nazýváme *skóre* grafu a dvě skóre považujeme za stejná, pokud jedno lze získat přerováním čísel druhého (tzn. skóre je nezávislé na zvoleném pořadí vrcholů).

Příklad 1. Je to skóre?

Ověřte, jestli $(1,3,3,4,5,5,6,7)$ a $(1,2,3,4,5,5,6)$ jsou skóre grafu. Pokud ano, sestrojte graf s daným skóre.

Příklad 2. Listy. Dokažte, že pokud má konečný strom vrchol stupně k , potom má alespoň k listů.

Příklad 3. Nezávislá množina ve stromě

Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)

Příklad 4. Kolik hran?

Nechť G je graf na n vrcholech a má k komponent (skládá se z k souvislých podgrafů, mezi kterými nevede žádná hrana). Kolik nejmnů a kolik nejvíc hran může tento graf mít?

Příklad 5. Souvislost

Buď G graf na n vrcholech s $m > n - 1$ hranami. Ukažte, že je souvislý.

Příklad 6. Počet koster

Kolik koster má

- (1) K_4 (t.j. úplný graf na 4 vrcholech)?
- (2) C_n (cyklus délky n)?
- (3) činka, t.j. dva cykly délek m a n spojené cestou délky l ?

Příklad 7. Mosty v kostrách

Ukažte, že každá kostra obsahuje všechny mosty (hrany, jejichž odebráním se graf stane nesouvislý).