

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA 18.11. a 24.11. Cvičení VII.

1. GRAFY

Definice 1 (Isomorfismus grafů). Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou isomorfní, jestliže existuje bijekce $\pi: V \rightarrow V'$ taková, že $\{u, v\} \in E$ právě když $\{\pi(u), \pi(v)\} \in E'$.

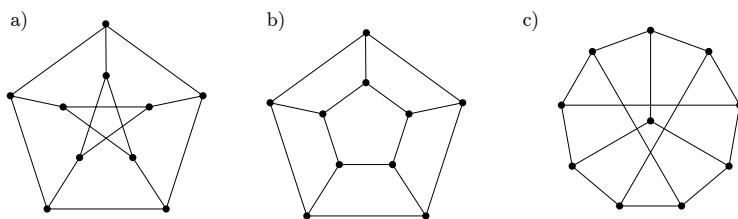
Definice 2 (Automorfismus, asymetrický graf). *Automorfismus* grafu je každý isomorfismus z G do G . Graf je *asymetrický* (*strnulý*), je-li jeho jediný automorfismus identické zobrazení (tj. $f(v) = v$, neboli každý vrchol se zobrazí sám na sebe).

Příklad 1. ZOO na 4 vrcholech.

Najděte všechny neisomorfní grafy na 4 vrcholech.

Příklad 2. Izomorfní?

Rozhodněte zdali jsou následující grafy izomorfní a pokud ano najděte mezi nimi izomorfismus, pokud ne dokažte to.



Příklad 3. Počty?

Uvažte množinu vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ a určete, kolik je na této množině různých (ale vzájemně izomorfních):

- úplných grafů K_n
- cest P_n
- cyklů C_n
- úplných bipartitních grafů $K_{k, n-k}$ v závislosti na k
- disjunktních sjednocení dvou úplných grafů $K_k \cup K_{n-k}$ v závislosti na k
- grafů, v nichž každý vrchol má stupeň 1.

Příklad 4. Kružnice a její doplněk

Pro která $n \in \mathbb{N}$ je C_n isomorfní se svým doplňkem?

Příklad 5. Kubické grafy.

Ukažte, že každý 3-regulární graf má sudý počet vrcholů.

Příklad 6. Asymetrické stromy.

- Najděte *někaký* asymetrický strom na alespoň 2 vrcholech (tzn. strom s jediným automorfismem).
- Jaký je nejmenší možný počet vrcholů asymetrického stromu? Najděte takový strom.

Příklad 7. Izomorfismus je ekvivalence.

Ukažte, že izomorfismus dává ekvivalenci na grafech s $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Zjistěte pro jaké grafy má jeho třída ekvivalence nejvíce prvků a nalezněte příklad takového grafu pro vhodné n .

Příklad 8. Podgrafy.

Najděte všechny grafy, které jako podgraf neobsahují

- cestu délky 2
- cestu délky 3
- indukovanou cestu délky 2.