DISKRÉTNÍ MATEMATIKA 6.10. a 7.10. Cvičení II.

Příklad 1. Celé části
Které z následujících vztahů jsou správné?

(1) $\lfloor \frac{(n+1)^2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor + n$
(2) $\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$

Příklad 2. Přímky.
Nakresleme n přímek v rovině tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 se neprotínají v jednom bodě. Na kolik částí je rovina rozdělena těmito přímkami?

1. Výroky

Připomenutí značení:

(a) negace:$\neg A$
(b) konjugce: $A \wedge B$ (nebo $A \& B$)
(c) disjunkce: $A \vee B$
(d) implikace $A \Rightarrow B$
(e) ekvivalence $A \iff B$
(f) univerzální kvantifikátor : $\forall x : A(x)$ (případně $\forall x \in M : A(x)$)
(g) existenční kvantifikátor : $\exists x : A(x)$ (případně $\exists x \in M : A(x)$)
(h) Obměna implikace$A \Rightarrow B$ je implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$

Vlastnosti negace:

(a) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
(b) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
(c) $\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge \neg B$
(d) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$
(e) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$

Příklad 3. Negace.
Utvořte negace výroků:

(a) Když je číslo a kladné, pak má rovnice řešení.
(b) Číslo a je nezáporné a rovnice má řešení.
(c) Každá žena je vyšší než dva metry.
(d) Pro každé přirozené číslo n platí, že pokud je n sudé, pak $(n-1)2$ je liché.
(e) Každá množina pěti nebo více čísel obsahuje aspoň tři lichá čísla nebo aspoň tři sudá čísla.
(f) V každém kruhu je nějaký student, který nezíská zápočet z analýzy ani z diskrétní matematiky.

Příklad 4. Obměna.
Zformulujte obměnu.

(a) Jestli nejsem doma, jsem v práci.
(b) Pokud je x násobek 6 a y násobek 7, pak xy je sudé.
(c) Pokud je p prvočíslo, pak $p = 2$ nebo p je liché.
(d) Je-li ciferný součet přirozeného čísla dělitelný třemi, pak je i toto číslo dělitelné třemi.

Příklad 5. Ekvivalentní?.
Všechny kvantifikace jsou přes množinu přirozených čísel. Jsou následující dvojice výroků ekvivalentní? Pokud ne, najděte konkrétní predikáty P a Q tak, aby byl jeden výrok pravdivý a druhý nepravdivý.

(a) $\forall x \exists y : P(x,y)$ vs. $\exists y \forall x : P(x,y)$
(b) $\forall x \forall y : P(x,y)$ vs. $\forall y \forall x : P(x,y)$
(c) $(\forall x : P(x)) \Rightarrow (\forall x : Q(x)) \iff \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x)$

Příklad 6. Potenční množina.
Nalezněte potenční množinu množin X a Y.

$$X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$
$$Y = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq 20, i \equiv 1 \mod 5\}$$

Příklad 7. Symetrická diference.
Zjistěte, které z následujících vztahů pro symetrickou diferenci $\dot{-}$ definovanou
$A \dot{-} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(a) $A \dot{-} B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
(b) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$
(c) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$
(d) $A \dot{-} (B \dot{-} A) = A$
(e) $A \dot{-} A = \emptyset$
(f) $A \dot{-} \emptyset = A$

Příklad 8. $A \subseteq B$
Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$.

(a) $A \setminus B = \emptyset$
(b) $A \cup B = B$
(c) $A \cap B = A$
(d) $A \setminus B \subseteq B$
(e) $A \cap B = \emptyset$
(f) $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

email: mikina@kam.mff.cuni.cz, url: http://kam.mff.cuni.cz/~mikina/.