# DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
## 29.9. a 30.9. Cvičení I.

**Příklad 1. Šachovnice.**
Mějme šachovnici $8 \times 8$ Lze ji:

(a) pokrýt kostkami domina?
(b) pokrýt kostkami domina, jestliže z ní vyřadíme dvě protilehlá políčka (z diagonály)?
(c) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka ležící vedle sebe (tj. mají společnou jednu stranu)?
(d) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka téže barvy?
(e) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka různých barev?

(Dominové kostky jsou obdélníky $1 \times 2$ a lze je otáčet.)

**Příklad 2. Devatero mincí.**
Máte 9 mincí a rovnoramenné váhy. Jedna z mincí je falešná, což se pozná podle toho, že váží méně než ostatní (to víte, kočičí zlato). Jak na co nejmenší počet vážení zjistit, která to je?
(A jak to dopadne pro $M$ mincí?)

**Příklad 3. Šibenice.**
Stojíte na rozcestí, jedna cesta vede k pokladu, druhá k šibenici. Mimo to se tam vyskytují dva pocestní. Jeden vždy mluví pravdu, druhý vždy lže. Můžete si vybrat jednoho z nich a položit mu jednu otázku na ano/ne. Jak to udělat, abyste zjistili, která cesta je která?

**Příklad 4. Bláto.**
$n$ dětí si společně hraje, po určité době se $k$ dětí zablátí na čele. Vrátí se domů a otec jim řekne: „Nejméně jeden z vás má bláto na čele".

Dále se postupuje v krocích. Otec se opakovaně ptá: „Ví někdo z vás zda má bláto na čele?" Dokažte, že po $k$ krocích všechny zablácené děti odpovědí ANO.

**Příklad 5. Suma čtverců.**
Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

**Příklad 6. Dělitelnost.**
Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 (beze zbytku).

**Příklad 7. Mince.**
Dokažte indukcí, že každou sumu větší než 4 umíme zaplatit mincemi hodnoty 2 a 5.

**Příklad 8. Čokoláda.**
Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

**Příklad 9. Fibonacci.**
Připomeňme si, že Fibonacciho čísla jsou definovány následovně:

- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pro všechna $i \geq 3$

Dokažte, že pro ně platí následující rovnost.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

email: `mikina@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~mikina/`.

# DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
## 29.9. a 30.9. Cvičení I.

**Příklad 1. Šachovnice.**
Mějme šachovnici $8 \times 8$ Lze ji:

(a) pokrýt kostkami domina?
(b) pokrýt kostkami domina, jestliže z ní vyřadíme dvě protilehlá políčka (z diagonály)?
(c) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka ležící vedle sebe (tj. mají společnou jednu stranu)?
(d) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka téže barvy?
(e) pokrýt kostkami domina jestliže vyřadíme dvě políčka různých barev?

(Dominové kostky jsou obdélníky $1 \times 2$ a lze je otáčet.)

**Příklad 2. Devatero mincí.**
Máte 9 mincí a rovnoramenné váhy. Jedna z mincí je falešná, což se pozná podle toho, že váží méně než ostatní (to víte, kočičí zlato). Jak na co nejmenší počet vážení zjistit, která to je?
(A jak to dopadne pro $M$ mincí?)

**Příklad 3. Šibenice.**
Stojíte na rozcestí, jedna cesta vede k pokladu, druhá k šibenici. Mimo to se tam vyskytují dva pocestní. Jeden vždy mluví pravdu, druhý vždy lže. Můžete si vybrat jednoho z nich a položit mu jednu otázku na ano/ne. Jak to udělat, abyste zjistili, která cesta je která?

**Příklad 4. Bláto.**
$n$ dětí si společně hraje, po určité době se $k$ dětí zablátí na čele. Vrátí se domů a otec jim řekne: „Nejméně jeden z vás má bláto na čele".

Dále se postupuje v krocích. Otec se opakovaně ptá: „Ví někdo z vás zda má bláto na čele?" Dokažte, že po $k$ krocích všechny zablácené děti odpovědí ANO.

**Příklad 5. Suma čtverců.**
Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

**Příklad 6. Dělitelnost.**
Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 (beze zbytku).

**Příklad 7. Mince.**
Dokažte indukcí, že každou sumu větší než 4 umíme zaplatit mincemi hodnoty 2 a 5.

**Příklad 8. Čokoláda.**
Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

**Příklad 9. Fibonacci.**
Připomeňme si, že Fibonacciho čísla jsou definovány následovně:

- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pro všechna $i \geq 3$

Dokažte, že pro ně platí následující rovnost.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

email: mikina@kam.mff.cuni.cz, url: http://kam.mff.cuni.cz/~mikina/.