

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
Cvičení 22.10.2013

Konference. Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtvericí 2 krát
- s celou pěticí právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

Prosté funkce. Necht' $|M| = m$ a $|N| = n$. Kolik je prostých funkcí z M do N ?

Podmnožiny liché velikosti. Necht' $|X| = n$. Kolik má X podmnožin liché velikosti?

Definice 1 (Permutace). Permutací nazýváme prosté zobrazení konečné množiny X do sebe.

Definice 2 (Faktoriál). Pro $n = 0$ je $0! = 1$. Pro $n \geq 1$ definujeme

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{i=1}^n i$$

k -prvkové podmnožiny. Necht' $|X| = n$. Napište vzorec pro výpočet počtu všech k -prvkových podmnožin a dokažte, že je správný.

Definice 3 (Binomický koeficient).

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Identity. Dokažte následující vztahy

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Kuličky do přihrádek. Mějme k kuliček, které chceme rozdělit do n jamek. Vyjádřete, kolika způsoby můžeme rozdělit kuličky do jamek pokud v každé jamce má být daný počet kuliček a kuličky jsou různobarevné.

	nanejvýš jedna kulička	libovolně kuliček	alespoň jedna kulička
různobarevné			
stejnobarevné			

Triangulace. Kolik způsobů lze rozdělit n -úhelník na trojúhelníky? (T.j. nakreslit neprotínající se úhlopříčky?)

Další identita;

- Dokažte vzorec $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ indukcí podle n (při pevném r).
- Jaký má tento vzorec kombinatorický význam (tzn. co to říká, dívám-li se na kombinační čísla jako na něco o podmnožinách)?