DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
2. cvičení 8. 10. 2014

O modrookém domorodém obyvatelstvu. Na ostrově žije 1000 domorodců, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči. Každý domorodec vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná tu svoji. Jejich náboženství jim zakazuje se o barvě očí bavit a dozví-li se nějaký domorodec, že má modré oči, pak se musí následující den zabít. Jednoho dne kmen navštívil cestovatel neznalý místních zvyklostí, který při svém odjezdu neopatrně prohlásil: " To jsem rád, že vidím osobu s modrýma očima.". Jaký vliv bude mít tato poznámka na domorodce?

- Nestane se nic, protože cestovatel nepřinesl žádnou novou informaci. Každý člověk z kmene již před jeho návštěvou věděl, že někteří z místních mají modré oči.
- Po 100 dnech všichni modroocí domorodci spáchají sebevraždu. To proto, že daná situace je speciální případ následující věty, která se dá dokázat matematickou indukcí.

De Moivrova věta. Dokažte že pro $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

Potenční množiny. Nalezněte potenční množinu množiny $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Uzávorkování. Ukažte, že každá dvě uzávorkování výrazu $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ dávají stejný výsledek.

Mohutnosti. Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?

Počet funkcí. Mějme množiny X velikosti n a Y velikosti m. Kolik existuje různých funkcí z X do Y?

Potenční množiny zase ... Jaká je velikost potenční množiny M v závislosti na velikosti M samotné?

Funkce prosté a na. Najděte funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která
(a) je prostá a není na
(b) je na a není prostá

Skládání funkcí. Funkce $f(g(x))$ je prostá. Musí být funkce f a/nebo g také prosté?

Ekvivalence I.. Nechť R je relace ekvivalence na množine X a $R[x]$ je množina všech prvků množiny X, které jsou s x v relaci. Dokažte:
(a) $x \in R[x]$
(b) $(x,y) \in R \Rightarrow R[x] = R[y]$
(c) $(x,y) \notin R \Rightarrow R[x] \cap R[y] = \emptyset$

Ekvivalence II.. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.

Ekvivalence III.. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence:
(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, (x,y) \in R \iff p$ dělí $(x-y)$
(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x,y) \in R \iff x$ dělí y a zároveň y dělí x
(c) $X = \mathbb{N}$, $(x,y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y
(d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a,b),(c,d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Vlastnosti nerovností. Popište relaci $R \circ R$, označuje-li R
(a) relaci rovnosti „$=$" na množine $\mathbb{N}$
(b) relaci „$\leq$" na $\mathbb{N}$
(c) relaci „$<$" na $\mathbb{N}$
(d) relaci „$<$" na $\mathbb{R}$

Transitivita. Nechť R a S jsou tranzitivní relace na množině X. Budou následující relace také tranzitivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \triangle S$ (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- R^{-1}

Počet reflexivních relací. Kolik je různých reflexivních relací na množině n prvků?

email: mikina@kam.mff.cuni.cz, url: http://kam.mff.cuni.cz/~mikina/.