**DISKRÉTNÍ MATEMATIKA**
*** * * VÁNOČNÍ SADA DOMÁCÍCH ÚKOLŮ * * ***
**k odevzdání nejpozději 3 dny před plánovaným termínem zkkoušky**

**O VÁNOČNÍ SADĚ PŘÍKLADŮ:**

- vánoční sada je štědrá;)
- za každý příklad je možné získat 2 body
- není stanovené pevné datum odevzdání, ALE počítejte s tím, že mi bude trvat nějaký čas je opravit - vyhrazuji si **MINIMÁLNĚ 3 DNY** na opravení příkladů
- příklady nemusíte odevzdat najednou
- počítejte s tím, že z nich nemusíte získat plný počet a odevzdejte je na etapy / vyřeště jich víc než kolik bodů minimálně potřebujete
- odevzdávat je můžete přes moodle / emailem
- pokud budete mít otázky ohledně zadání, ozvěte se.

**AŤ SE VÁM DAŘÍ A POD STROMEČKEM PŘÍJEMNĚ POČÍTÁ :)**

**Příklad 1. Sečtěte:**

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \frac{1}{k}$$

**Příklad 2. Dokažte:**

$$1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + (n-1)2 + n1 = \binom{n+2}{3}$$

**Příklad 3.** Dokažte (můžete zkusit vícero způsoby) následující vztah:

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5}$$

**Příklad 4. # monotonních funkcí.**
Kolik existuje funkcí $f : \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots n\}$, které jsou monotnní, t.j. pro $i < j$ platí $f(i) < f(j)$?

**Příklad 5.** $0$ **nebo** $5$ **[4 body]**
Nechť $G$ je souvislý graf, v němž každé dva různé vrcholy $u, v$ mají buď 0 nebo 5 společných vrcholů. Dokažte, že pak je $G$ nutně $k$-regulární (pro nějaké $k$).
(Hint: podívejte se na $u, v$ spojené hranou, nazvěme $U$ množinu sousedů vrcholu $u$ a $V$ množinu sousedů $v$. Zkuste dokázat, že $|U| = |V|$.)

**Příklad 6. I bez nich to půjde. 5 bodů]**
Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy $u$ a $v$ takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

**Příklad 7. Neexistence grafu.**
Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky.

email: mikina@kam.mff.cuni.cz, url: http://kam.mff.cuni.cz/~mikina/.

**Příklad 8. Sousedi** Ukažte, že pro každý strom s $n$ vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že $v_i$ má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

**Příklad 9. Nash-Wiliamsova věta.**
Ukažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.

**Příklad 10. Věta o čtyřech barvách.**
Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

**Příklad 11. Barevnost grafu.**
Dokažte užitečné tvrzení:

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

($\chi(G)$ je barevnost grafu $G$, $\alpha(G)$ velikost největší nezávislé množiny v $G$.)

**Příklad 12. $\chi(G)$.**
Dokažte: $\chi(G) \leq 1 + \max\{\deg_G(x) \mid x \in V(G)\}$.

**Příklad 13. Obarvení skoro $K_n$.**

(1) Určete chromatické číslo úplného grafu bez jedné hrany.
(2) Skuste z grafu $K_n$ odebrat 2 hrany tak, aby jeho barevnost klesla co nejvíc.

**Příklad 14.** Určete chromatické číslo grafu $W_n$ (kolesa), což je graf, který vznikne z cyklu $C_{n-1}$ přidáním jednoho vrcholu, který spojíme s každým vrcholem cyklu. Několik příkladů je na obrázku.

**Příklad 15. Dělení rovinného grafu**
Dokažte, že graf je rovinný, právě když libovolné jeho dělení je rovinný graf.

**Příklad 16. Kdy je $K_{m,n}$ rovinný?**
Určete pro která $m$ a $n$ je graf $K_{m,n}$ rovinný (a dokažte).

**Definice 1** (Maximální rovinný graf)**.** *Maximální rovinný graf* je takový graf, že přidání jakékoliv další hrany (samozřejmě na téže množině vrcholů) způsobí, že graf již není rovinný.

**Definice 2** (Triangulace)**.** *Triangulace* je rovinný graf, v němž je každá stěna (včetně vnější) trojúhelník.

**Příklad 17. Triangulace.**
Dokažte, že každá triangulace je maximální rovinný graf a naopak každý maximální rovinný graf je triangulace. (Zmiňovali jsme si to v rychlosti na cvičení, zde to prosím dokažte důkladně.)

**Příklad 18. Duál duálu.**
Pokud $G$ je souvislý rovinný graf, pak $G = G^{**}$.
Dokažte i opačnou implikaci.