

Diskrétní matematika

9. cvičení

9.12.2019

Definice 1. Strom je souvislý graf bez cyklů.

Definice 2. Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf. Pak graf $T = (V, F)$, kde $F \subseteq E$, je kostra grafu G , pokud T je strom.

Úloha 1. Dokažte, že graf $G = (V, E)$ je strom právě tehdy, když je acyklický a $|E| = |V| - 1$.

Úloha 2. Dokažte, že pokud má strom vrchol stupně k , pak má alespoň k listů.

Úloha 3. Nechť T je strom na n vrcholech, který obsahuje pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik obsahuje listů?

Úloha 4. Ukažte, že každý souvislý graf má kosteru.

Úloha 5. Pro každé $n \geq 3$ sestrojte graf, který má právě n koster.

Úloha 6. Mějme posloupnost přirozených čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Ukažte, že (d_1, \dots, d_n) je skóre stromu.

8. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 6.1.2020 17:20

Úkoly odevzdávejte buď na cvičení nebo elektronicky mailem na adresu `mberg@kam.mff.cuni.cz`.

Úloha 1 (3 body). Najděte 3-regulární graf, který obsahuje most. Graf je 3-regulární, pokud každý vrchol má stupeň 3. Hrana je most, pokud po jejím odstranění vzroste počet komponent souvislosti.

Úloha 2 (3 body). Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Označme p_i počet vrcholů stupně i ve stromu T . Ukažte, že

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - 3p_5 - \dots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Úloha 3 (3 body). Mějme graf $G = (V, E)$. Množina $S \subseteq V$ se nazývá nezávislá, pokud žádné dva její vrcholy nejsou v G spojené hranou. Ukažte, že strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $\lceil n/2 \rceil$.

Úloha 4 (2 body). Určete počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$.