

Diskrétní matematika

5. cvičení

11.11.2019

Úloha 1. Kolik čísel zbude, pokud z $1, \dots, 1000$ vyškrtáme všechny násobky čísel 2, 3, 5 a 7?

Úloha 2. Mějme 5 modrých, 3 červené a 2 zelené kuličky. Kolika způsoby je dokážeme uspořádat do řady tak, aby žádná barva netvořila souvislý úsek?

Úloha 3. Na plesu máme n párů, tedy celkem $2n$ lidí. Kolika způsoby můžeme tyto lidi rozdělit do dvojic tak, aby žádný z párů nebyl v jedné dvojici?

Úloha 4. Kolik existuje permutací na n prvcích právě s jedním pevným bodem? Kolik existuje permutací na n prvcích právě s $1 \leq k \leq n$ pevnými body? Můžete použít šatnářčino čísla, tedy $\check{s}(n)$ (n -té šatnářčino číslo), které označuje počet permutací na n prvcích bez pevných bodů.

Úloha 5. Ukažte, že

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \dots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1,$$

kde $\check{s}(n)$ je šatnářčino číslo.

Úloha 6. Kolik existuje ekvivalencí na množině $\{1, \dots, n\}$, které mají právě m ekvivalenčních tříd? Nejprve může být vhodné si rozmyslet, jak tento počet souvisí s počtem surjektivních zobrazení (zobrazení na) $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$.

5. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 25.11.2019 17:20

Úkoly odevzdávejte buď na cvičení nebo elektronicky mailem na adresu `mberg@kam.mff.cuni.cz`.

Úloha 1 (2 body). Spočtete, kolik existuje čísel mezi přirozenými čísly $1, \dots, 100$, které nejsou dělitelné druhou mocninou žádného přirozeného čísla většího než 1. Použijte nějaký sofistikovanější způsob, než jen vypsání všech čísel a pak vyškrtání těch, která dělitelná jsou.

Úloha 2 (2 body). Kolik existuje permutací čísel $1, \dots, 2k$, v nichž se žádné sudé číslo nezobrazí samo na sebe? Stačí, když tento počet vyjádříte jako sumu, ve které můžete používat šatnářčina čísla.

Úloha 3 (4 body). Kolik existuje permutací anglické abecedy, v nichž se nenachází žádné ze slov PONK, DOBA, COP, OPICE? Když říkáme, že se slovo vyskytuje v permutaci, tak tím myslíme, že pokud z dané permutace vypustíme všechna ostatní písmena, tak vznikne dané slovo. Tedy daná písmena slova se nemusí nutně v permutaci vyskytovat těsně za sebou.