Diskrétní matematika

3. cvičení 21.10.2019

Úloha 1. Nechť $(\mathbb{N}, \leq)$ je standardní uspořádání na přirozených číslech. Pro každou z následujících relací na $\mathbb{N}^2$ rozhodněte, zda se jedná o uspořádání:

a) Relace $\preceq$ definovaná předpisem $(a,b) \preceq (c,d)$ právě když $a \leq c \wedge b \leq d$.
b) Relace $\preceq$ definovaná předpisem $(a,b) \preceq (c,d)$ právě když $a \leq c \vee b \leq d$.
c) Relace $\preceq$ definovaná předpisem $(a,b) \preceq (c,d)$ právě když $a \leq c \wedge b \geq d$.
d) Relace $\preceq$ definovaná předpisem $(a,b) \preceq (c,d)$ právě když $a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$.

Úloha 2. Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi (nakreslete příslušný Hasseův diagram):

a) žádný minimální ani žádný maximální prvek
b) žádný nejmenší a alespoň jeden minimální prvek

Úloha 3. Dokažte, že každé částečné uspořádání má maximálně jeden nejmenší prvek.

Úloha 4. Dokažte, že pokud je uspořádání lineární, tak každý minimální prvek je také nejmenší.

Úloha 5. Relace R a S na množině X jsou izomorfní, pokud existuje bijekce $f : X \to X$ (jinak řečeno permutace na množině X), pro kterou platí, že $\forall x, y \in X \quad (x,y) \in R \Leftrightarrow (f(x),f(y)) \in S$. Ukažte, že všechna lineární uspořádání na konečné množině X jsou navzájem izomorfní.

Úlohy, které jsme nestihli minule:

Úloha 6. Najděte příklady ekvivalencí na množině $\mathbb{N}$, případně na množině $\mathbb{R}$.

Úloha 7. Mějme relaci $R = \{(x,y) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2\,;\, x|y \wedge y|x\}$. Je tato relace ekvivalence? Pokud ano, jaké jsou její třídy ekvivalence?

Úloha 8. Ukažte, že pro funkci $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prostá právě když f je na. Platí to i pro nekonečné množiny?

---

3. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 11.11.2019 17:20
Úkoly odevzdávejte buď na cvičení nebo elektronicky mailem na adresu `mberg@kam.mff.cuni.cz`.

Úloha 1 (2 body)**.** Dokažte nebo vyvraťte: Má-li uspořádání $(X, \leq)$ právě jeden minimální prvek, pak je tento prvek také nejmenší.

Úloha 2 (2 body)**.** Nechť (X,R) je částečně uspořádaná množina. Dokažte, že pak platí následující:

a) Relace R^{-1} je částečné uspořádání na X.
b) Pokud $x \in X$ je minimální prvek uspořádání R, potom x je maximální prvek uspořádání R^{-1}.
c) Pokud $x \in X$ je nejmenší prvek uspořádání R, potom x je největší prvek uspořádání R^{-1}.

Úloha 3 (2 body)**.** Nechť $R_1, \ldots, R_k$ jsou částečná uspořádání na množině X. Ukažte, že relace $R = \bigcap_{i=1}^{k} R_i$ je také částečné uspořádání na X.

Úloha 4 (2 body)**.** Ukažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. O jaká čísla se jedná?