Diskrétní matematika

2. cvičení 14.10.2019

Úloha 1. Určete počet relací na n prvkové množině

a) všech
b) reflexivních
c) symetrických
d) antisymetrických

Úloha 2. Najděte příklad (neprázdné) relace na množině $\{1,2,3,4\}$, která

a) je symetrická i antisymetrická.
b) není ani symetrická ani slabě antisymetrická.

Úloha 3. Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R:

a) relaci rovnosti na množině $\mathbb{N}$
b) relaci $\leq$ na $\mathbb{N}$
c) relaci $<$ na $\mathbb{N}$
d) relaci $<$ na $\mathbb{R}$

Úloha 4. Najděte relace R a S na libovolné množině takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Úloha 5. Nechť R je relace na množině X. Dokažte, že R je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.

Úloha 6. Najděte příklady ekvivalencí na množině $\mathbb{N}$, případně na množině $\mathbb{R}$.

Úloha 7. Mějme relaci $R = \{(x,y) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2\,;\, x|y \wedge y|x\}$. Je tato relace ekvivalence? Pokud ano, jaké jsou její třídy ekvivalence?

Úloha 8. Nechť $\mathbb{C}$ označuje množinu komplexních čísel. Mějme relaci R na $\mathbb{C}$ definovanou předpisem $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$. Nejprve dokažte, že R je ekvivalence a pak nalezněte její třídy ekvivalence.

Úloha 9. Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$.

a) Jsou-li f a g prosté funkce, je $g \circ f$ také prostá?
b) Jsou-li f a g funkce na, je $g \circ f$ také na?

Úloha 10. Ukažte, že pro funkci $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prostá právě když f je na. Platí to i pro nekonečné množiny?

Úloha 11. Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ a také bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

---

2. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 4.11.2019 17:20
Úkoly odevzdávejte buď na cvičení nebo elektronicky mailem na adresu `mberg@kam.mff.cuni.cz`.

Úloha 1 (2 body)**.** Nechť R je relace na konečné množině X. Definujme relace R^n induktivně tak, že $R^1 = R$ a $R^n = R^{n-1} \circ R$ pro $n \geq 2$. Ukažte, že pak musí existovat $i \neq j$ takové, že $R^i = R^j$.

Úloha 2 (2 body)**.** Najděte relaci R na libovolné nekonečné množině takovou, že $R^i \neq R^j$ pro každé $i \neq j$.

Úloha 3 (3 body)**.** Nechť R a S jsou dvě ekvivalence na množině X. Rozhodněte, zda následující relace jsou také ekvivalence. Rozlišujte možnosti vždy, někdy a nikdy. Řešení vždy zdůvodněte.

a) $R \cap S$
b) $R \cup S$
c) $R \setminus S$
d) $R \circ S$
e) $R^{-1} \circ S^{-1}$

Úloha 4 (2 body)**.** Kolik existuje všech zobrazení $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$? Kolik existuje bijekcí $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$? A kolik prostých zobrazení $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$?