Diskrétní matematika

10. cvičení 16.12.2019

Definice 1. Strom je souvislý graf bez cyklů.

Definice 2. Nechť $G = (V,E)$ je souvislý graf. Pak graf $T = (V,F)$, kde $F \subseteq E$, je kostra grafu G, pokud T je strom.

Úloha 1. Pro každé $n \geq 3$ sestrojte graf, který má právě n koster.

Úloha 2. Mějme posloupnost přirozených čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Ukažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Úloha 3. Určete počet koster úplného grafu K_n bez jedné hrany.

Definice 3. Graf G je rovinný právě tehdy, když se dá nakreslit do roviny bez křížení hran.

Věta 1. *Nechť $G = (V,E)$ je rovinný graf s alespoň třemi vrcholy. Pak platí $|E| \leq 3|V| - 6$.*

Úloha 4. Ukažte, že každý rovinný graf má vrchol stupně nejvýše 5.

Úloha 5. Ukažte, že každý rovinný graf $G = (V,E)$ bez izolovaných vrcholů má alespoň $|V|/2$ vrcholů stupně nejvýše 10.

Úloha 6. Dokažte (bez použití Kuratowského věty), že K_5 není rovinný.

Věta 2 (Kuratowského)**.** *Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje dělení $K_{3,3}$ ani dělení K_5 jako podgraf.*

Úloha 7. Ukažte, že $K_{n,m}$ je rovinný právě tehdy, když $\min(n,m) \leq 2$. Můžete použít Kuratowského větu.

9. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 9.2.2020 23:59
Úkoly odevzdávejte buď na cvičení nebo elektronicky mailem na adresu `mberg@kam.mff.cuni.cz`.

Úloha 1 (4 body)**.** Ukažte, že každý neorientovaný souvislý graf lze zorientovat tak, že pro každý vrchol se jeho vstupní a výstupní stupeň liší maximálně o 1. Zorientováním myslíme to, že každou neorientovanou hranu nahradíme orientovanou hranou v jednom ze dvou možných směrů. Vstupní stupeň vrcholu je počet orientovaných hran, které do něj vedou. Výstupní stupeň vrcholu je počet orientovaných hran, které vedou z něj. Může být užitečné si vzpomenout na eulerovské tahy.

Úloha 2 (3 body)**.** Označme $p_n = \kappa(K_n)$, tedy p_n označuje počet koster úplného grafu na n vrcholech. Ukažte, že platí následující rekurentní vzorec:

$$(n-1)p_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} k(n-k) p_k p_{n-k}.$$

Úloha 3 (3 body)**.** Ukažte, že doplněk rovinného grafu na 11 vrcholech nemůže být rovinný.

Úloha 4 (3 body)**.** Ukažte, že libovolné nakreslení rovinného grafu s $n \geq 3$ vrcholy má nejvýš $2n - 4$ stěn. Pokud bychom navíc předpokládali, že daný graf neobsahuje trojúhelník (cyklus délky 3), tak je stěn nejvýše $n - 2$.