Diskrétní matematika

1. cvičení 7.10.2019

Úloha 1. Máme 9 mincí a rovnoramenné váhy. Jedna z mincí je ale falešná, což se pozná podle toho, že váží méně než ostatní. Jak na co nejmenší počet vážení zjistit, která to je? A jak to dopadne pro n mincí?

Úloha 2. Máme n pytlů plných mincí. V jednom pytli jsou ale mince falešné. Falešná mince se pozná tak, že váží pouze 0,9 g zatímco pravá váží 1 g. Dále máme k dispozici digitální váhy, které váží s přesností na setinu gramu. Jak na jedno vážení zjistit, v kterém pytli jsou falešné mince? A jak by to dopadlo, kdyby se falešné mince mohli vyskytovat ve více než jednom pytli?

Úloha 3. Rozhodněte, které z následujících podmínek jsou ekvivalentní s podmínkou $A \subseteq B$. Pokud nějaká podmínka ekvivalentní není, pokuste se jí upravit tak, aby ekvivalentní byla.

a) $A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

e) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 4. Indukcí dokažte, že $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Úloha 5. Nechť x je reálné číslo takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Ukažte, že $x^n + \frac{1}{x^n}$ je celé číslo pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 6. Mějme posloupnost Fibonacciho čísel, tedy posloupnost $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definovanou rekurentním vzorcem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$ s počátečními podmínkami $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ pro $n \geq 1$.

Úloha 7. Dokažte indukcí, že $4|(6n^2 + 2n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 8. Mějme šachovnici 8×8, ve které odstraníme dvě protilehlá rohová políčka. Lze ji pokrýt dominovými kostkami (obdélníky 1×2 políčka, které lze otáčet)?

Úloha 9. Skupina 100 odsouzených vězňů získala šanci se zachránit. Následující den každý vězeň dostane náhodně buď červenou, nebo černou čepici. Poté budou postaveni do řady tak, že každý vidí všechny vězně a jejich čepice před sebou, ale nikoho za sebou. Zároveň žádný vězeň neví, jakou má čepici. Vězni budou postupně od posledního v řadě voláni, aby řekli barvu své čepice. Každý vězeň zároveň slyší, co říkají ostatní spoluvězni stojící za ním. Vězni dostanou milost, pokud alespoň 99 z nich řekne správně barvu své čepice. Přes noc mají vězni možnost domluvit se na strategii. Najděte strategii, která dokáže vězně zachránit.

---

1. série domácích úkolů

Termín odevzdání: 21.10.2019 17:20
Úkoly odevzdávejte buď na cvičení nebo elektronicky mailem na adresu `mberg@kam.mff.cuni.cz`.

Úloha 1 (3 body)**.** Máme tabulku čokolády velikosti $n \times m$, kterou chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně lámání je potřeba? Změní se něco, pokud bychom místo lámání čokoládu řezali? Tedy dovolili dělení částí i podle libovolných křivek, které ale neprotínají samy sebe?

Úloha 2 (2 body)**.** Dokažte indukcí Moivreovu větu, tedy že platí

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha),$$

kde i je imaginární jednotka, tedy $i^2 = -1$. Při důkazu se mohou hodit následující identity: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ a $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$.

Úloha 3 (4 body)**.** Mějme n bílých míčků postavených do řady. Každý z nich chceme přebarvit na buď modro nebo na červeno takovým způsobem, aby se v řadě nevyskytovali dva modré míčky vedle sebe. Ukažte, že počet možných přebarvení splňující tuto podmínku je F_{n+2}, kde F_n značí n-té Fibonacciho číslo.