Zkouška: Diskrétní matematika 11/I/2007 varianta A

1. Odvoďte vzorec pro počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s právě jedním pevným bodem. **5**

2. a) Definujte prosté zobrazení množiny X do množiny Y. Nalezněte příklad množiny X a zobrazení $f\colon X \to X$, které je prosté, ale není na. **2**

b) Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definujeme relaci částečného uspořádání $\preceq$ takto: $a \preceq b$ právě když $a = b$ nebo $b > a + 2$. Nakreslete Hasseův diagram uspořádané množiny $(X, \preceq)$. **2**

c) Uspořádejte následující funkce (kde proměnná n je přirozené číslo) podle rychlosti růstu, tj. určete, která z nich pro velké n nabývá největší hodnoty, která druhé největší, atd. **2**

$$10^n, \qquad (2n)!, \qquad 10n^5, \qquad 2^{n^2}.$$

3. Buď $G = (V, E)$ graf. Zobrazení $f\colon V \to V$ nazveme *automorfismem* grafu G, pokud je to isomorfismus grafu G s ním samotným. Kolik automorfismů mají následující grafy: K_n (úplný graf na n vrcholech), P_n (cesta délky n), C_n (kružnice délky n). **5**

4. Zformulujte a dokažte Erdősovo–Szekeresovo lemma o rostoucích nebo nerostoucích podposloupnostech libovolné konečné posloupnosti reálných čísel. **5**

Zkouška: Diskrétní matematika 11/I/2007 varianta B

1. Pro přirozené číslo $n \geq 5$ definujeme graf G takto: Množinu vrcholů sestává ze všech dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, a dvě takové podmnožiny jsou v grafu G spojeny hranou, právě když mají prázdný průnik. Určete, kolik vrcholů a hran má graf G, a rozhodněte, zda je souvislý. **5**

2. a) Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definujeme relaci částečného uspořádání $\preceq$ takto: $a \preceq b$ právě když b je dělitelné a. Nakreslete Hasseův diagram uspořádané množiny $(X, \preceq)$. **2**

b) Definujte zobrazení množiny X na množinu Y. Nalezněte příklad množiny X a zobrazení $f\colon X \to X$, které je na, ale není prosté. **2**

c) Uspořádejte následující funkce (kde proměnná n je přirozené číslo) podle rychlosti růstu, tj. určete, která z nich pro velké n nabývá největší hodnoty, která druhé největší, atd. **2**

$$10n^3, \qquad (\lfloor n/2 \rfloor)!, \qquad 7^n, \qquad 2^{n^2}.$$

3. Kolik má úplný bipartitní graf $K_{3,5}$ eulerovských podmnožin hran? Kolik z nich obsahuje lichý počet hran? **5**

4. Zformulujte a dokažte Spernerovu větu o nezávislých systémech množin. **5**

Zkouška: Diskrétní matematika 17/I/2007 varianta A

1. Kolik je vzájemně neisomorfních grafů s 9 vrcholy, jejichž každý vrchol má stupeň 2 nebo 0? **5**

2. a) Definujte bijektivní zobrazení množiny X do množiny Y. Kolik je bijektivních zobrazení množiny $X = \{a, b, c, d\}$ do množiny $Y = \{3, 2, 5, 9\}$? **2**

b) Definujte pojem kostry grafu. Kolik nejvíce hran může mít kostra úplného bipartitního grafu $K_{20,10}$? **2**

c) Uspořádejte následující funkce (kde proměnná n je přirozené číslo) podle rychlosti růstu, tj. určete, která z nich pro velké n nabývá největší hodnoty, která druhé největší, atd. **2**

$$\binom{2n}{n}, \qquad n!, \qquad 4^{\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n}^4.$$

3. Nechť $Q_n = (V, E)$ (n je přirozené číslo) je graf na množině vrcholů $V = \{0,1\}^n$ (tj. vrcholy jsou uspořádané n-tice z nul a jedniček), přičemž $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\}$ je hrana, právě když se obě n-tice liší pouze v jediné souřadnici. Rozhodněte, pro která $n = 1, 2, \ldots$ se graf Q_n dá nakreslit jedním uzavřeným tahem bez opakování hran. **5**

4. Jakou dimenzi má prostor kružnic (sestávající ze všech eulerovských podmnožin hran) souvislého grafu G s n vrcholy a m hranami? Vaše tvrzení dokažte. **5**

Zkouška: Diskrétní matematika 17/I/2007 varianta B

1. Pro přirozená čísla $n = 1, 2, \ldots$ určete počet všech uspořádaných dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. (Vyjde jednoduchý vzorec.) **5**

2. a) Definujte částečné uspořádání na množině X. Které z následujících 3 relací R_1, R_2 a R_3 na množině přirozených čísel $\{1, 2, \ldots\}$ jsou částečná uspořádání: $xR_1y \Leftrightarrow x - y$ je dělitelné pěti, $xR_2y \Leftrightarrow x = y$ nebo $x - y > 3$ a $xR_3y \Leftrightarrow x + y > 0$? **2**

b) Definujte pojem úplného bipartitního grafu. Kdy je graf C_n (kružnice na n vrcholech) isomorfní úplnému bipartitnímu grafu? **2**

c) Uspořádejte následující funkce (kde proměnná n je přirozené číslo) podle rychlosti růstu, tj. určete, která z nich pro velké n nabývá největší hodnoty, která druhé největší, atd. **2**

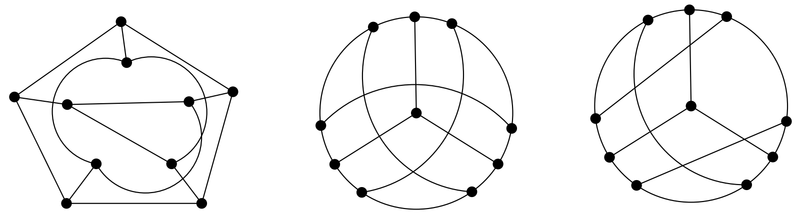
$$(2^n)^{10} \qquad \sqrt{n!}, \qquad 10^n, \qquad n^n.$$

3. Buď n přirozené číslo. Uvažme trochu neobvyklou sadu $\binom{n}{2}$ dominových kostek: pro každou dvouprvkovou podmnožinu $\{x, y\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ je v sadě přesně jedna kostka $[x \mid y]$. Pozor, kostku lze otočit, a tedy např. $[1 \mid 3]$ a $[3 \mid 1]$ je táž kostka. Zjistěte, pro která $n \in \{5, 6, 7\}$ lze všechny kostky srovnat do řady tak, aby každé dvě sousední kostky sousedily políčky se stejným číslem (jako v obvyklém dominu). Návod: pomyslete na kreslení grafu jedním tahem. **5**

4. V souvislém grafu s nezáporným ohodnocením hran chceme najít kostru *maximální* možné váhy. Pozměňte hladový algoritmus na hledání minimální kostry (probraný na přednášce) tak, aby řešil uvedený problém maximální kostry. Dokažte, pokud možno přesně, že tento algoritmus skutečně vždy najde nějakou kostru (její maximalitu dokazovat nemusíte). **5**

Zkouška: Diskrétní matematika 17/I/2007 varianta C

1. Které z následujících tří (souvislých) grafů jsou isomorfní? **5**



2. a) Čemu se v konečném tělese GF(11) rovná 3^{-1}? **2**

b) Definujte konečnou projektivní rovinu. Existuje graf, který by byl zároveň také konečnou projektivní rovinou? **2**

c) Definujte relaci mezi množinami X a Y. Pokud X má m prvků a Y má n prvků, kolik je všech relací mezi X a Y?

3. Dokažte matematickou indukcí odhad $n! \geq (n/e)^n$ pro všechna n, kde $e = 2,718281828\ldots$ je Eulerovo číslo. **5**

4. Zformulujte a dokažte Erdősovo–Szekeresovo lemma o rostoucích nebo nerostoucích podposloupnostech libovolné konečné posloupnosti reálných čísel. **5**

Zkouška: Diskrétní matematika 17/I/2007 varianta D

1. Dokažte matematickou indukcí odhad **5**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

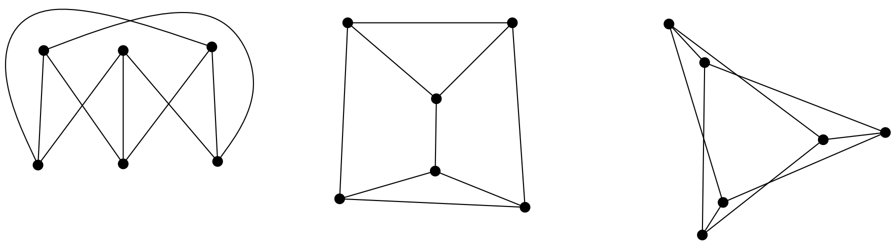
pro všechna přirozená čísla n.

2. a) Definujte minimální prvek uspořádané množiny a nejmenší prvek uspořádané množiny. Musí minimální prvek být vždy také nejmenším prvkem? Musí nejmenší prvek být vždy také minimálním prvkem? **2**

b) Čemu se v konečném tělese GF(17) rovná $3 + 4 \times 5$? **2**

c) Napište vzorec pro číslo $\binom{n}{k}$. Dokažte nebo vyvraťte (např. za pomoci kombinatorické definice čísel $\binom{n}{k}$): pro všechna přirozená čísla x a y platí $\binom{x}{2} + \binom{y}{2} \leq \binom{x+y}{2}$. **2**

3. Které z následujících tří (souvislých) grafů jsou isomorfní? **5**



4. Zformulujte a dokažte Spernerovu větu o nezávislých systémech množin. **5**

Zkouška: Diskrétní matematika 6/II/2007 varianta A

1. Definujte isomorfismus grafů. Ukažte, že pro každé dostatečně velké n existuje nejméně 10^n navzájem neisomorfních grafů na n vrcholech. **5**

2. a) Napište dvě definice stromu. Dokažte nebo vyvraťte: indukovaný podgraf stromu je vždy strom. **2**

b) Definujte zobrazení na (neboli surjektivní). Rozhodněte, zda zobrazení $f : \{0, 1, 2, \ldots, 776\} \to \{0, 1, 2, \ldots, 776\}$, kde $f(x)$ je zbytek čísla $7x$ při dělení 777, je na. (Návod: vzpomeňte si na konečná tělesa GF(p).) **2**

c) Definujte pojem řetězce v uspořádané množině $(X, \preceq)$. Kolik prvků má nejdelší řetězec v množině $\{1, 2, \ldots, 130\}$ uspořádané relací dělitelnosti "|" (tj. například 3|9, 3|15, ale $3 \nmid 10$)? **2**

3. Dokažte matematickou indukcí odhad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1)$$

pro každé přirozené číslo n. (Zde ln je logaritmus o základu $e = 2{,}718281828\ldots$. Nápověda: použijte dolní odhad pro e^x zmíněný na přednášce.) **5**

4. Sečtěte:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = ?$$

5

Zkouška: Diskrétní matematika 6/II/2007 varianta B

1. Definujte, které grafy jsou stromy. Dokažte, že graf G na n vrcholech je strom, právě když je souvislý a má přesně $n-1$ hran. (Pozor, jsou to dvě implikace, každou je potřeba dokázat zvlášť.) **5**

2. a) Definujte zobrazení na (neboli surjektivní). Rozhodněte, zda zobrazení $f : \{0,1,2,\ldots,30\} \rightarrow \{0,1,2,\ldots,30\}$, kde $f(x)$ je zbytek čísla $5x$ při dělení 31, je na. (Návod: vzpomeňte si na konečná tělesa GF(p).) **2**

b) Definujte pojem grafu. Kolik existuje grafů na množině vrcholů $\{1,2,\ldots,50\}$? (Nemusíte dopočítávat.) **2**

c) Definujte pojem vnoření jedné uspořádané množiny do druhé. Rozhodněte, zda každou konečnou uspořádanou množinu lze vnořit do uspořádané množiny $(2^{\{1,2,\ldots,10000\}}, \subseteq)$. **2**

3. Dokažte matematickou indukcí odhad $n! \geq (n/e)^n$ pro všechna n, kde $e = 2,718281828\ldots$ je Eulerovo číslo. **5**

4. Přirozené číslo je *bezčtvercové*, není-li dělitelné žádnou druhou mocninou $4, 9, 16, 25, \ldots$. Například 42 je bezčtvercové, ale 18 nikoli. Kolik čísel $n \in \{1,2,\ldots,120\}$ je bezčtvercových? (Návod: použijte princip inkluze a exkluze.) **5**