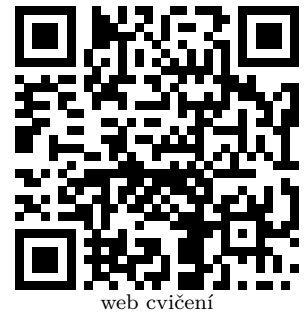


Matematická analýza 2

Cvičení #4 – Funkce dvou proměnných



Tahák z MA1: derivace. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Pro malé h platí $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

$$(c)' = 0, \quad (x^k)' = kx^{k-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$
$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (f+g)' = f' + g', \quad (cf)' = cf',$$
$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Monotonie a extrémy. Je-li $f' > 0$ na intervalu, f tam roste; je-li $f' < 0$, klesá. Vnitřní lokální extrém diferencovatelné funkce může nastat jen tam, kde $f' = 0$. Na uzavřeném intervalu zkontrolujte také krajní body.

Kompaktnost a extrémy. V $\mathbb{R}^n$ je množina kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená. Spojitá reálná funkce na *neprázdné* kompaktní množině nabývá minima i maxima. (Polynomy jsou spojité.)

Funkce dvou proměnných. Graf $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Vrstevnice* $g(x, y) = c$ tvoří body stejné hodnoty; při zafixování jedné souřadnice dostaneme funkci jedné proměnné.

Příklady

1. **MA1.** Uvažujte $f(x) = x^3 - 3x$.

- (a) Spočítejte $f'(x)$ a rozhodněte, na kterých intervalech funkce roste a klesá.
- (b) Najděte její lokální extrémy, určete jejich typ a načrtněte graf.
- (c) Jaké je minimum a maximum f na $[-2, 2]$? Ve kterých bodech jich nabývá?

2. **První funkce dvou proměnných.** Položme $g(x, y) = x^2 + 4y^2$.

- (a) Nakreslete *vrstevnice* $g(x, y) = c$ pro $c = 0, 1, 4$. Co na obrázku znamenají?
- (b) Nakreslete grafy jednorozměrných funkcí $x \mapsto g(x, 1)$ a $y \mapsto g(1, y)$.
- (c) Z bodu $(1, 1)$ se vydejme jednou ve směru $(1, 0)$ a podruhé ve směru $(0, 1)$. Vypočítejte derivace v $t = 0$ jednorozměrných funkcí

$$p(t) = g(1+t, 1), \quad q(t) = g(1, 1+t).$$

Co nám tyto dvě derivace říkají?

- (d) Zkuste také směr $(1, 1)$: spočítejte derivaci funkce $r(t) = g(1+t, 1+t)$ v $t = 0$. Je opravdu změna v tomto směru rychlejší než ve směru $(0, 1)$? Co se stane, když místo $(1, 1)$ použijete *jednotkový* vektor $(1, 1)/\sqrt{2}$?
- (e) ★ **Kterým směrem nejrychleji?** Můžeme se vydat libovolným jednotkovým směrem $v = (a, b)$, kde $a^2 + b^2 = 1$. Položte

$$h_v(t) = g(1 + ta, 1 + tb).$$

Spočítejte $h'_v(0)$. Pro který směr je derivace největší a pro který nejmenší? Co to znamená geometricky?

3. **Kdy existují extrémy?** Pro $g(x, y) = x^2 + 4y^2$ z předchozí úlohy najděte minimum a maximum (pokud existují) na

$$K_1 = [-1, 1]^2, \quad K_2 = (-1, 1)^2, \quad K_3 = \mathbb{R}^2.$$

Co nám o existenci extrémů říká věta o spojitě funkci na kompaktu? Pozor: když nám věta nic nezaručuje, nemusí to ještě znamenat, že extrém neexistuje.

4. ★ **Maximum, minimum, nebo sedlo?** Uvažujte

$$F(x, y) = x^3 - 3x + y^2.$$

Prozkoumejte chování funkce v okolí bodů $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Co se děje, měníte-li pouze x ? Co při změně pouze y ? Který z těchto bodů je lokálním minimem a který *sedlovým bodem* (v jeho okolí jsou jak větší, tak menší hodnoty)? Svá tvrzení zdůvodněte.

5. ★★ **Stačí zkoumat jednotlivé souřadnice?** Definujme

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zkoumejte jednorozměrné funkce $x \mapsto H(x, 0)$ a $y \mapsto H(0, y)$. Je přesto H spojitá v $(0, 0)$? Co nám tento příklad říká o studiu funkcí více proměnných pomocí řezů?

Nápovědy

Koukejte sem až tehdy, když jste se chvíli poctivě zasekli.

1. Derivace je $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. Udělejte si znaménkovou tabulku pro intervaly oddělené body -1 a 1 . U poslední části porovnejte hodnoty také v krajních bodech $-2, 2$.
2. Vrstevnice jsou množiny bodů, v nichž má funkce stejnou hodnotu. V (b) dosadte $y = 1$, resp. $x = 1$. V (c) a (d) derivujte obyčejné funkce t . *Pozor:* vektory $(1, 1)$ a $(0, 1)$ nemají stejnou délku. Pro (e) vyjde $h'_v(0) = 2a + 8b$; zkuste Cauchyho-Schwarzovu nerovnost pro $(2, 8)$ a (a, b) .
3. g je všude nezáporná a neomezená shora na $\mathbb{R}^2$. Na čtverci $[-1, 1]^2$ porovnejte střed a rohy. Na otevřeném čtverci si představte body stále bližší k některému rohu, ale stále uvnitř.
4. Funkci lze psát $F(x, y) = f(x) + y^2$, kde f je z první úlohy. Pro sedlový bod porovnejte dvě přímky procházející daným bodem: vodorovnou a svislou. Pro úplný důkaz minima v $(1, 0)$ zkuste upravit $F(x, y) - F(1, 0)$ a vytknout $(x - 1)^2$.
5. Na osách je H konstantně nulová. Zkuste se ale k počátku blížit po přímce $y = x$, například pomocí posloupnosti $(1/n, 1/n)$.