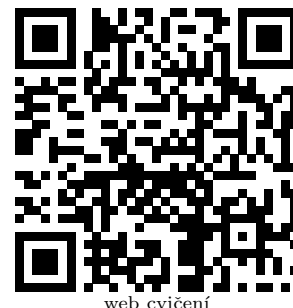


Matematická analýza 2

Cvičení #3 – Metrické prostory podruhé



web cvičení

Připomenutí definic a vět

V metrickém prostoru (M, d) je $U \subseteq M$ *otevřená*, pokud pro každé $x \in U$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subseteq U$. Je *uzavřená*, pokud $M \setminus U$ je otevřená. Posloupnost (x_n) je *Cauchyovská*, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall m, n \geq N) \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Prostor je *úplný*, pokud v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje. Je *kompaktní*, pokud má každá posloupnost podposloupnost konvergující k bodu prostoru. Zobrazení $f : M \rightarrow M$ je *kontrakce*, pokud existuje $c \in [0, 1)$ tak, že

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \quad (x, y \in M).$$

Banachova věta: Kontrakce úplného metrického prostoru do sebe má právě jeden pevný bod $a = f(a)$ a pro libovolné $x_0 \in M$ k němu konverguje posloupnost $x_{n+1} = f(x_n)$.

Příklady

1. **Pevný bod a iterace.** Nechť $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$. Položme $x_0 = 1$ a $x_{n+1} = f(x_n)$.

(a) Spočítejte několik prvních členů (x_n) . Co tipujete, že je jejich limitou?

(b) Ukažte, že $f([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ a že pro všechna $x, y \in [1, 2]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|.$$

(c) Co plyne z Banachovy věty pro libovolné $x_0 \in [1, 2]$? Určete limitu iterace.

(d) ★ Najděte kontrakci $(0, 1) \rightarrow (0, 1)$, která nemá pevný bod. Proč to neodporuje Banachově větě?

2. **Úplnost a kompaktnost.** Které z následujících prostorů jsou úplné a které kompaktní? Vždy použijte obvyklou vzdálenost $|x - y|$:

$$\mathbb{R}, \quad [0, 1], \quad (0, 1), \quad \mathbb{Z}, \quad \{0, 1, 2, \dots, 10\}.$$

U neúplných zkuste najít Cauchyovskou posloupnost bez limity v prostoru; u nekompaktních posloupnost bez konvergentní podposloupnosti.

3. **Otevřenost a uzavřenost závisí na prostoru.** Položme

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}.$$

Ukažte, že A je zároveň otevřená i uzavřená v metrickém prostoru $\mathbb{Q}$ (s obvyklou vzdáleností). Jak je to s otevřeností a uzavřeností A jako podmnožiny $\mathbb{R}$?

- ★ 4. **Vzdálenost od množiny.** Nechť $\emptyset \neq A \subseteq M$ v metrickém prostoru (M, d) a definujme

$$h(x) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Dokažte, že $|h(x) - h(y)| \leq d(x, y)$. Ukažte, že $h(x) = 0$ právě tehdy, když každá otevřená koule se středem x protíná A . Kdy je $\{x : h(x) = 0\} = A$?

- ★ 5. **Porovnání metrik pomocí Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti.** Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ označme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Kdy nastává rovnost? Co nerovnosti říkají o konvergenci posloupností v obou metrikách?

- ★ 6. **Jak prodloužit interval do nekonečna?**

(a) Najděte bijekci $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) Najděte metriku d na $(0, 1)$, pro kterou je f izometrií na $(\mathbb{R}, |x - y|)$.

(c) Je $((0, 1), d)$ úplný prostor? A je úplný $(0, 1)$ s obvyklou metrikou?

(d) ★ Lze f zvolit tak, aby obvyklá a nová metrika určovaly stejné otevřené množiny?

- ★★ 7. **Nekonečné binární řetězce.** Nechť $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Pro různé $x, y \in X$ položme $d(x, y) = 2^{-k}$, kde k je první index, ve kterém se liší; dále $d(x, x) = 0$. Dokažte, že d je metrika; dokonce $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. Je (X, d) úplný? Je kompaktní?

Nápovědy

Koukejte sem až tehdy, když jste se chvíli poctivě zasekli.

- (1) První členy jsou $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots$. Upravte $f(x) - f(y)$ na jediný zlomek. Pevný bod splňuje $x = 1 + \frac{1}{1+x}$. Pro poslední část zkuste $f(x) = x/2$ na $(0, 1)$.
- (2) V $\mathbb{R}$ má každá Cauchyovská posloupnost limitu a každá omezená posloupnost konvergentní podposloupnost. Pro $(0, 1)$ zkuste $x_n = 1/(n+1)$; pro $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ posloupnost $x_n = n$. Na konečné množině musí být každá nekonečná posloupnost v některém bodě nekonečněkrát.
- (3) Jako podmnožina $\mathbb{Q}$ je $A = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Všimněte si, že $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; pro otevřenost doplňku v $\mathbb{Q}$ to bude důležité. Jako podmnožina $\mathbb{R}$ obsahuje A jen racionální čísla.
- (4) Pro každé $a \in A$ platí $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Vezměte infimum přes a a prohod'te x, y . Podmínka $h(x) = 0$ znamená, že pro každé $r > 0$ existuje $a \in A$ s $d(x, a) < r$.
- (5) Levou nerovnost zkuste získat umocněním a rozepsáním součtu. Pro pravou použijte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost

$$\left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

na vektory $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ a $(1, \dots, 1)$.

- (6) Hledejte funkci, která při $x \rightarrow 0^+$ utíká do $-\infty$ a při $x \rightarrow 1^-$ do $+\infty$ (například pomocí tangens nebo logaritmu). Novou vzdálenost měřte *po převedení bodů* pomocí f . Pro stejné otevřené množiny se hodí spojitost f i f^{-1} .
- (7) Jestliže x i z souhlasí s y v prvních k bitech, souhlasí v nich i navzájem. Cauchyovskost znamená, že pro každé pevné k se prvních k bitů členů posloupnosti od jisté chvíle nemění. Pro kompaktnost zkuste postupně vybírat podposloupnosti s konstantním prvním, pak i druhým, třetím atd. bitem a nakonec vzít diagonální podposloupnost.