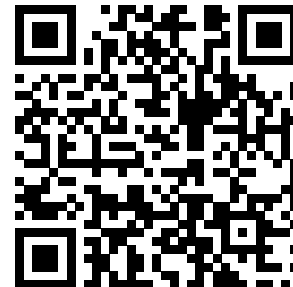


Matematická analýza 2

Cvičení #2 – Metrické prostory



Připomenutí definic

Metrický prostor je dvojice (M, d) , kde $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ je *metrika*: pro všechna $x, y, z \in M$ platí

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Otevřená a uzavřená koule se středem a a poloměrem $r > 0$ jsou

$$B(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}(a, r) = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}.$$

Množina $U \subseteq M$ je *otevřená*, pokud pro každý $x \in U$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subseteq U$; množina je *uzavřená*, pokud je její doplněk otevřený. Dále $x_n \rightarrow x$ znamená, že $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Zobrazení $f: M \rightarrow N$ je spojitě právě tehdy, když z $x_n \rightarrow x$ vždy plyne $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Příklady

1. **Tři přirozené metriky na $\mathbb{R}^2$.** Pro $x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$ položme

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

- (a) Nakreslete pro každou z těchto metrik otevřenou jednotkovou kouli $B((0, 0), 1)$ a její hranici.
(b) Která z těchto jednotkových koulí obsahuje kterou? Dokažte svá tvrzení přímo porovnáním d_1, d_2, d_∞ .

2. **Metriky pro informatiky.** Nechť G je souvislý neorientovaný graf a $d_G(u, v)$ je délka nejkratší cesty z u do v .

- (a) Ověřte, že d_G je metrika na množině vrcholů G .
(b) Uvažujte nekonečnou čtvercovou mřížku s vrcholy $\mathbb{Z}^2$, kde jsou hranou spojeny právě body lišící se o 1 v jedné souřadnici. Ukažte, že

$$d_G((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Jak tato vzdálenost souvisí s d_1 z předchozí úlohy?

- (c) V n -rozměrné krychli Q_n jsou vrcholy řetězce z $\{0, 1\}^n$ a hranou jsou spojeny právě dva řetězce lišící se v jednom bitu. Jak vypadá $d_G(x, y)$? Kolik vrcholů je ve vzdálenosti nejvýše r od 0^n , kde $r \in \{0, \dots, n\}$?

3. **Otevřená, uzavřená, obojí, nebo ani jedno?** Najděte příklad podmnožiny $\mathbb{R}$, která je

- (a) otevřená, ale není uzavřená,
(b) uzavřená, ale není otevřená,
(c) ani otevřená, ani uzavřená,
(d) zároveň otevřená i uzavřená.

4. V eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujte množiny

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ C = \{(x, y) : xy = 0\}, \quad D = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}.$$

Nejprve je nakreslete a tipněte, které jsou otevřené a které uzavřené. Potom zkuste alespoň dvě svá tvrzení dokázat z definic.

5. Nechť (M, d) je metrický prostor a $a \in M$.

- (a) Dokažte *obrácenou trojúhelníkovou nerovnost*

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

- (b) Dokažte, že funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ daná $f(x) = d(x, a)$ je spojitá.
(c) Použijte předchozí části k důkazu, že každá otevřená koule je otevřená a každá uzavřená koule je uzavřená.

6. Definujte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Rozhodněte, která z funkcí je spojitá v $(0, 0)$. U nespojitě funkce najděte konkrétní posloupnost $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$, která nespojitost odhalí; u spojitě funkce tvrzení dokažte.

- ★ 7. **Koule ve vysoké dimenzi.** Nechť $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ a předpokládejte, že $\text{vol}(rB_n) = r^n \text{vol}(B_n)$. Jaká část objemu B_n leží ve vrstvě $1 - \varepsilon < \|x\|_2 \leq 1$? Kolik je to přibližně pro $n = 100$ a $\varepsilon = 0.05$? Co vám výsledek říká o geometrii ve vysoké dimenzi?

Nápovědy

Koukejte sem až tehdy, když jste se chvíli poctivě zasekli.

- (1) Pro kouli se středem v počátku jen přepište podmínku $d((x, y), (0, 0)) < 1$. Pro porovnání metrik si všimněte, že pro $a, b \geq 0$ platí

$$\max\{a, b\} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b.$$

- (2) Pro trojúhelníkovou nerovnost spojte nejkratší cestu z u do w s nejkratší cestou z w do v . V mřížce musí každá cesta udělat alespoň $|x_1 - y_1|$ horizontálních a $|x_2 - y_2|$ vertikálních kroků. V Q_n je vzdálenost počet souřadnic, ve kterých se řetězce liší; vrcholů ve vzdálenosti právě k od 0^n je $\binom{n}{k}$.
- (3) Zkuste nejjednodušší intervaly: otevřený, uzavřený a polootevřený. Pro množinu, která je současně otevřená i uzavřená, nezapomeňte na $\emptyset$ a $\mathbb{R}$.
- (4) U otevřenosti hledejte kolem libovolného bodu malou kouli, která nepřekročí hranici. U uzavřenosti můžete pracovat s otevřeností doplňku. Pro C si všimněte, že mimo obě souřadnicové osy jsou obě souřadnice nenulové; pro D se podívejte na body blízko jeho vnitřku a na posloupnost blížící se ke krajnímu bodu.
- (5) Z trojúhelníkové nerovnosti napište zvlášť $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ a tutéž nerovnost s prohozenými x, y . Je-li $x \in B(a, r)$, zkuste poloměr $r - d(x, a) > 0$. Je-li naopak $x \notin \overline{B}(a, r)$, zkuste poloměr $d(x, a) - r > 0$.
- (6) U f zkuste například body na přímce $y = x$. U g využijte jednoduchý odhad

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|.$$

- (7) Vnitřní koule o poloměru $1 - \varepsilon$ má relativní objem $(1 - \varepsilon)^n$. Vnější vrstva je její doplněk v jednotkové kouli.