

Matematická analýza 2

Cvičení #1 – Opakování z Matematické analýzy 1

Není cílem vyřešit všechno.

Připomenutí definic

Pro posloupnost (a_n) reálných čísel a $a \in \mathbb{R}$ píšeme $a_n \rightarrow a$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

V MA1 jste psali $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$; zde budeme pro stručnost psát $a_n \rightarrow a$. Posloupnost (a_n) je *Cauchyovská*, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá v bodě a* , pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Příklady

1. Uvažujte posloupnost $a_n = 1/n$.

- (a) Dokažte přímo z definice, že $a_n \rightarrow 0$.
- (b) Napište přesnou negaci výroku $a_n \rightarrow a$.
- (c) Pomocí definice (nebo její negace) dokažte, že posloupnost $((-1)^n)$ nemá limitu.

2. Nechť $a_n \rightarrow a$ a zároveň $|a_n - b_n| \rightarrow 0$. Dokažte, že také $b_n \rightarrow a$.

Kterou vlastnost absolutní hodnoty jste v důkazu skutečně potřebovali?

3. (a) Dokažte přímo z definic, že každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská.
(b) Pro $n \geq 1$ položte

$$q_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}.$$

Je (q_n) Cauchyovská posloupnost v $\mathbb{Q}$? Konverguje v $\mathbb{Q}$?

- (c) Co tento příklad říká o rozdílu mezi $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$?

4. Nechť je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v bodě a a $x_n \rightarrow a$. Dokažte z definic, že

$$f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Co jste v důkazu skutečně použili o vzdálenosti $|x - y|$? Fungoval by i s jiným rozumným pojmem vzdálenosti?

★ Platí i obrácené tvrzení? Tj. pokud pro každou posloupnost $x_n \rightarrow a$ platí $f(x_n) \rightarrow f(a)$, musí být f spojitá v a ?

★ 5. Definujte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pro každou z funkcí rozhodněte, zda pro každé dvě posloupnosti $x_n \rightarrow 0$ a $y_n \rightarrow 0$ platí

$$f(x_n, y_n) \rightarrow 0, \quad \text{resp.} \quad g(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

★ 6. Uvažujte funkci

$$F(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Stojíme v bodě $(1, 1)$ a můžeme se pohnout malý kousek ve směru jednotkového vektoru $v = (a, b)$, kde $a^2 + b^2 = 1$. Položte

$$h_v(t) = F((1, 1) + tv).$$

Pomocí nástrojů z MA1 určete, pro který směr v funkce F v čase $t = 0$ klesá nejrychleji.

★ 7. Pro každé $n \geq 2$ najděte n různých bodů v $\mathbb{R}^4$ tak, aby mezi nimi bylo alespoň

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

dvojic ve vzdálenosti přesně 1.

Nápovědy

- (1) Při negování výroku postupně prohod'te $\forall$ a $\exists$. U posloupnosti $(-1)^n$ zkuste najít jedno pevné $\varepsilon > 0$, které funguje proti libovolnému kandidátovi na limitu.
- (2) Zkuste odhadnout $|b_n - a|$ přes $|b_n - a_n|$ a $|a_n - a|$.
- (3) Platí $0 \leq \sqrt{2} - q_n < 10^{-n}$. Pro Cauchyovskost můžete porovnat dva členy přes $\sqrt{2}$.
- (4) Pro obrácenou implikaci zkuste spor. Pokud f není spojitá v a , existuje jedno $\varepsilon_0 > 0$, pro které žádné δ nefunguje. Co se stane, když postupně vezmete $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots$?
- (5) U první funkce zkuste například $x_n = y_n$. U druhé hledejte jednoduchý odhad absolutní hodnoty, který jde k nule už jen z $x_n \rightarrow 0$ nebo $y_n \rightarrow 0$.
- (6) Nejprve spočítejte $h'_v(0)$. Pak potřebujete minimalizovat lineární výraz v a, b za podmínky $a^2 + b^2 = 1$.
- (7) Zapište si předmět Základy kombinatorické a výpočetní geometrie [NDMI009] :)