Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #7 – Pokračování Ramseyovy teorie

Opakování

Je-li A množina a $p \in \mathbb{N}$, pak jako $\binom{A}{p}$ značíme množinu všech p-prvkových podmnožin A a pro $n \in \mathbb{N}$ značíme $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Věta 1 (Ramseyova věta pro p-tice)**.** *Pro všechna $p, n, k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení $c\colon \binom{[N]}{p} \to [k]$ najdeme množinu $A \in \binom{[N]}{n}$ takovou, že c je na $\binom{A}{p}$ konstantní. Nejmenší takové N značíme $N = r(p, n, k)$ a nazýváme ho* Ramseyovo číslo *pro p, n, k.*

Důsledek 1. *Pro každé n existuje N takové, že v každém obarvení hran K_N dvěma barvami najdeme monochromatický K_n jako podgraf.*

Věta 2 (Nekonečná Ramseyova věta)**.** *Pro každé $p, k \in \mathbb{N}$ platí, že v každém obarvení $c\colon \binom{\mathbb{N}}{p} \to [k]$ najdeme nějakou nekonečnou $A \subseteq \mathbb{N}$ takovou, že c je na $\binom{A}{p}$ konstantní.*

Příklady

1. (**Happy ending problem.**) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^2$ obsahuje n bodů v konvexní poloze (tj. vrcholy konvexního n-úhelníka). Hint: Nejdřív si ručně rozmyslete, že pro $n = 4$ stačí zvolit $N = 5$.
2. Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.
3. Dokaž, že existuje nekonečná množina přirozených čísel H taková, že pro každá dvě různá čísla $x, y \in H$ má číslo $x + y$ sudý počet různých provočíselných dělitelů.
4. (**Schurova věta**.) Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$ a navíc x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.
5. (**Erdösovo–Szekeresovo lemma o podposloupnostech**.)
   (a) Dokažte, že v každé posloupnosti $(n-1)(m-1)+1$ různých přirozených čísel najdeme rostoucí podposloupnost délky n nebo klesající délky m.
   (b) Najděte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.
6. (a) Sestrojte libovolně velké $\{0,1\}$-matice, které neobsahují 2×2 matici se samými nulami ani se samými jedničkami jako *diagonální podmatici*. Matice A o rozměrech $n \times n$ je *diagonální podmatice* $N \times N$ matice B, pokud existuje $R \in \binom{[N]}{n}$ takové, že A dostaneme z B, když vybereme řádky i sloupce s indexy z R.
   (b) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále stejné, všechny prvky nad diagonálou stejné a všechny prvky pod diagonálou stejné.
   (c) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje jen nuly nebo jen jedničky.
7. Najděte 2-obarvení nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ takové, že žádná nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ není jednobarevná (může se hodit axiom výběru).
8. Pokud pro vás předchozí úkoly nebyly dostatečně zajímavé, zkuste dokázat následující dvě věty:
   (a) (**Hilbert's cube lemma**) Pro každé $m, c \in \mathbb{N}$ a každé c-obarvení kladných celých čísel existují $a, b_1, \ldots, b_m$ taková, že všechna čísla tvaru $a + \sum_{i \in I} b_i$ pro $I \subseteq \mathcal{P}([n])$ mají stejnou barvu.
   (b) (**van der Waerden's theorem**) Pro každé $c, k \in \mathbb{N}$ a každé c-obarvení kladných celých čísel v nich najdeme jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky k.