

# Základy kombinatoriky a teorie grafů

## Cvičení #6 – Ramseyova teorie

### Opakování

Je-li  $A$  množina a  $p \in \mathbb{N}$ , pak jako  $\binom{A}{p}$  značíme množinu všech  $p$ -prvkových podmnožin  $A$  a pro  $n \in \mathbb{N}$  značíme  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Věta 1** (Ramseyova věta pro  $p$ -tice). *Pro všechna  $p, n, k \in \mathbb{N}$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé obarvení  $c: \binom{[N]}{p} \rightarrow [k]$  najdeme množinu  $A \in \binom{[N]}{p}$  takovou, že  $c$  je na  $\binom{A}{p}$  konstantní. Nejmenší takové  $N$  značíme  $N = r(p, n, k)$  a nazýváme ho Ramseyovo číslo pro  $p, n, k$ .*

**Důsledek 1.** *Pro každé  $n$  existuje  $N$  takové, že v každém obarvení hran  $K_N$  dvěma barvami najdeme monochromatický  $K_n$  jako podgraf.*

**Věta 2** (Nekonečná Ramseyova věta). *Pro každé  $p, k \in \mathbb{N}$  platí, že v každém obarvení  $c: \binom{\mathbb{N}}{p} \rightarrow [k]$  najdeme nějakou nekonečnou  $A \subseteq \mathbb{N}$  takovou, že  $c$  je na  $\binom{A}{p}$  konstantní.*

### Příklady

- (Happy ending problem.)** Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že každá množina  $N$  bodů v obecné poloze v  $\mathbb{R}^2$  obsahuje  $n$  bodů v konvexní poloze (tj. vrcholy konvexního  $n$ -úhelníka).  
Hint: Nejdřív si ručně rozmyslete, že pro  $n = 4$  stačí zvolit  $N = 5$ .
- Určete nejmenší  $N$  takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran  $K_N$  najdeme buď modrou kopii  $K_{1,3}$  nebo červenou kopii  $K_3$ .
- (Schurova věta.)** Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme  $x, y \in \mathbb{N}$  takové, že  $x \neq y$  a navíc  $x, y$  a  $x + y$  mají stejnou barvu.
- (Erdősovo–Szekeressovo lemma o podposloupnostech.)**
  - Dokažte, že v každé posloupnosti  $(n-1)(m-1) + 1$  různých přirozených čísel najdeme rostoucí podposloupnost délky  $n$  nebo klesající délky  $m$ .
  - Najděte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.
- Sestrojte libovolně velké  $\{0, 1\}$ -matice, které neobsahují  $2 \times 2$  matici se samými nulami ani se samými jedničkami jako *diagonální podmatici*. Matice  $A$  o rozměrech  $n \times n$  je *diagonální podmaticí*  $N \times N$  matice  $B$ , pokud existuje  $R \in \binom{[N]}{n}$  takové, že  $A$  dostaneme z  $B$ , když vybereme řádky i sloupce s indexy z  $R$ .
  - Ukažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $DM(n) \in \mathbb{N}$  takové, že každá  $\{0, 1\}$ -matice  $M(n) \times M(n)$  obsahuje  $n \times n$  diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále stejné, všechny prvky nad diagonálou stejné a všechny prvky pod diagonálou stejné.
  - Ukažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $M(n) \in \mathbb{N}$  takové, že každá  $\{0, 1\}$ -matice  $M(n) \times M(n)$  obsahuje  $n \times n$  podmatici, která obsahuje jen nuly nebo jen jedničky.
- Najděte 2-obarvení nekonečných podmnožin  $\mathbb{N}$  takové, že žádná nekonečná podmnožina  $\mathbb{N}$  není jednobarevná (může se hodit axiom výběru).
- Pokud pro vás předchozí úkoly nebyly dostatečně zajímavé, zkuste dokázat následující dvě věty:
  - (Hilbert's cube lemma)** Pro každé  $m, c \in \mathbb{N}$  a každé  $c$ -obarvení kladných celých čísel existují  $a, b_1, \dots, b_m$  taková, že všechna čísla tvaru  $a + \sum_{i \in I} b_i$  pro  $I \subseteq \mathcal{P}([m])$  mají stejnou barvu.
  - (van der Waerden's theorem)** Pro každé  $c, k \in \mathbb{N}$  a každé  $c$ -obarvení kladných celých čísel v nich najdeme jednobarevnou aritmetickou posloupnost délky  $k$ .