Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #5 – Rovinné grafy

Druhá série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **30. 3. 2023**
Řešení posílejte Majdě na mail `magdalena.misinova@gmail.com`

1. Dokažte následující tvrzení.
   (a) Každý strom obsahuje nejvýše jedno perfektní párování. [**2 body**]
   (b) Strom má perfektní párování právě tehdy, když po odebrání libovolného vrcholu má vzniklý les právě jednu lichou komponentu. [**2 body**]

2. Graf G je *kriticky 2-souvislý*, pokud $k_v(G) \geq 2$, ale $k_v(G - e) \leq 1$ pro všechny hrany $e \in E(G)$. Dokažte, že vrcholově 2-souvislý graf je kriticky 2-souvislý právě tehdy, když všechny jeho cykly jsou indukované. Jinak řečeno: Buď $G = (V, E)$ vrcholově 2-souvislý graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní: [**4 body**]
   (a) Pro každé $e \in E$ platí, že $k_v(G - e) \leq 1$,
   (b) Pro každou posloupnost různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takovou, že $v_i v_{i+1} \in E$ pro všechna i ($v_{n+1} = v_1$) platí, že mezi nimi nejsou žádné další hrany.

3. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ obsahuje cesty $u \to v$ i $v \to u$.
   (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$ vychází alespoň jedna hrana do $V \setminus X$. [**1 bod**]
   (b) Ukažte, že turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. orientovanou kružnici, která navstíví každý vrchol právě jednou, kružnice je orientovaná, pokud všechny hrany vedou cyklicky stejným směrem). [**3 body**]

Opakování

Graf G je *rovinný*, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení (tj. nakreslení, kde vrcholy jsou body, hrany jsou křivky spojující vrcholy a hrany se mohou protínat jen ve svých koncových vrcholech). Po odstranění hran se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěnami nakreslení.*

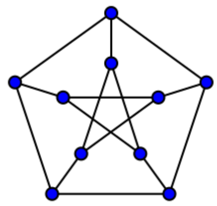
Jako *k-obarvení* grafu $G = (V, E)$ nazveme funkci $c\colon V \to \{1, \dots k\}$ takovou, že je-li $uv \in E$, pak $c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu G*, značená jako $\chi(G)$, je nejmenší k takové, že pro G existuje k-obarvení.

Věta 1 (Eulerova formule)**.** *Pro nakreslení souvislého rovinného grafu o v vrcholech, e hranách a f stěnách platí $v - e + f = 2$.*

Věta 2 (Kuratowského věta)**.** *Graf je rovinný, právě když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.*

Příklady

1. Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.
2. Ukažte, že Petersenův graf není rovinný:



3. Pro dané nakreslení rovinného grafu si jako *hranici* stěny F označíme množinu vrcholů, které s F sousedí. Najděte rovinný graf a dvě jeho nakreslení taková, že množiny hranic jejich stěn nejsou stejné.
4. Nalezněte[1] nakreslení K_5, K_6 a K_7 na torus.
5. Najděte graf, který lze nakreslit na torus tak, že jeho stěny jsou homeomorfní otevřenému disku, ale také tak, že nějaká jeho stěna otevřenému disku homeomorfní není.

Když se budete nudit

Zkuste zobecnit Eulerovu větu pro libovolné plochy (doporučuju orientované a neorientované zvlášť). Hint: Bude z ní nerovnost, pro orientované bude na pravé straně $2 - 2g$ (g je genus) a rovnost bude nastávat pro nakreslení, kde je každá stěna homeomorfní otevřenému disku.

[1] Klidně na internetu.