Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #4 – Hallova věta

Opakování: Hallova věta

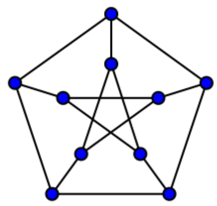
Nechť X a I jsou množiny. *Množinový systém* na X je $|I|$-tice $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. Všimněte si, že se může stát $M_i = M_j$ pro $i \neq j$. *Systém různých reprezentantů* pro $\mathcal{M}$ je **prostá** funkce $f : I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ máme $f(i) \in M_i$. Pokud nebude řečeno jinak, předpokládáme, že $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i jsou konečné.

Věta 1 (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ platí následující (Hallova) podmínka*

$$\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \, .$$

Příklady

1. Buďte rádi, že jsem udělal jen dvě iterace. (Nebo by to moc práce nepřidalo?)
   (a) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ systém různých reprezentantů?
   (b) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ systém různých reprezentantů?
   (c) (Bonus.) Pro která $k, n \in \mathbb{N}$ má systém všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ systém různých reprezentantů?
2. *Párování* v grafu $G = (V, E)$ je množina $F \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ patří do nejvýše jedné hrany z F. *Perfektní párování* je párování F takové, že každý vrchol patří do právě jedné hrany F.
   (a) Najděte 6 různých perfektních párování v Petersenově grafu a dokažte, že zádná další neexistují.



   (b) Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf ($k \geq 1$) má perfektní párování.
3. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ alespoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.
4. *Latinský obdélník řádu $k \times n$*, $k \leq n$ je matice $L \in \{1, \ldots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku i sloupci vyskytuje každé číslo nejvýše jednou. *Latinský čtverec řádu n* je latinský obdélník řádu $n \times n$. Dokažte, že každý latinský obdélník jde doplnit na latinský čtverec.
5. Dilworthova věta říká, že má-li v konečném částečném uspořádání $(P, \prec)$ nejdelší antiřetězec velikost r, pak lze P rozdělit na r řetězců. Dokažte, že Dilworthova věta implikuje Hallovu větu (přesněji řečeno tu těžší implikaci).