Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #3 – Souvislost grafů

Opakování: Souvislost grafů

Buď $G = (V, E)$ graf. G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G[V \setminus C]$ je nesouvislý (kde $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$) je graf, který g *indukuje* na A).

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k-1$, pokud $G \simeq K_k$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je *vrcholově (resp. hranově) k-souvislý*, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Z přednášky víme, že $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$.

Věta 1 (Fordova–Fulkersonova věta)**.** *$k_e(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k hranově disjunktních cest.*

Věta 2 (Mengerova věta)**.** *$k_v(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k vrcholově disjunktních cest (u a v samozřejmě sdílejí).*

Příklady

1. Najděte příklad grafu, kde lze odebrat vrchol tak, že
   - (a) hranová souvislost vzroste (klesne) o libovolné předem dané číslo,
   - (b) vrcholová souvislost vzroste o libovolné předem dané číslo. O kolik může $k_v(G)$ klesnout?
2. Graf je *k-regulární*, má-li všechny stupně rovné k.
   - (a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
   - (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
   - (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
3. Dokažte následující tvrzení pro vrcholově k-souvislý graf $G = (V, E)$:
   - (a) Pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů A takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x.
   - (b) Pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq V$ velikosti k existuje k úplně vrcholově disjunktních cest z A do B.
4. Buď Q_k hyperkrychle (tj. $Q_k = (\{0,1\}^k, E)$ a $x, y \in E$, právě když se x, y liší na právě jedné pozici). Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.
5. Pro hranově 2-souvislý graf G definujeme relaci $\simeq$ na jeho hranách tak, že $e \simeq f$, pokud $e = f$ nebo $G - e - f$ není souvislý. Dokažte následující:
   - (a) $e \simeq f$ právě tehdy, když e a f jsou obsaženy v týchž cyklech.
   - (b) $\simeq$ je ekvivalence.
   - (c) Po odstranění všech hran z nějaké ekvivalenční třídy P relace $\simeq$ dostaneme graf, jehož (netriviální) komponenty jsou hranově 2-souvislé.
   - (d) Kontrahujeme-li každou komponentu $G - P$ do vrcholu, dostaneme na konci cyklus.
6. (**Robbinsova věta**) Orientovaný graf je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje orientovaná cesta. Dokažte, že hrany grafu G lze zorientovat tak, že výsledný graf $\overrightarrow{G}$ je silně souvislý, právě tehdy, když G je hranově 2-souvislý. (Hint: Využijte předchozí příklad)