

Základy kombinatoriky a teorie grafů

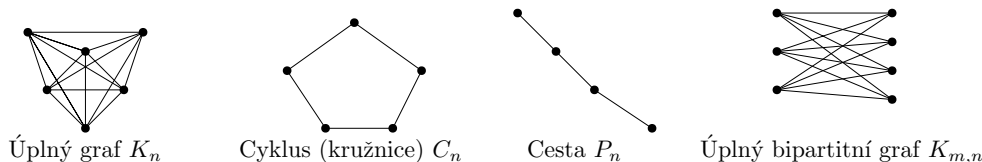
Cvičení #1 – Grafy atd.

Nultý domácí úkol

Napište mi, jestli chcete mít své výsledky zveřejněné na webu. Pokud ano, pošlete mi nějakou přezdívku, jíž mám pro zveřejnění použít. (Nepovinně) mi napište pár vět o tom, co vás v matematice zajímá a baví a proč jste si zapsali tenhle předmět. [5 bodů]

Opakování

(Neorientovaný) graf G je dvojice (V, E) , kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran.

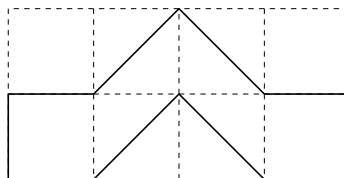


Graf H je *podgraf* grafu G , pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$, značíme $H \subseteq G$. H je *indukovaný podgraf* G , pokud $H \subseteq G$ a navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{H}{2}$.

Stupeň vrcholu v (značíme $\deg_G(v)$) je počet hran G obsahujících v . Graf je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Doplňek grafu* G (značíme \bar{G}) je graf s $V(\bar{G}) = V(G)$ a $E(\bar{G}) = \binom{G}{2} \setminus E(G)$. Je-li $G = (V, E)$ graf a $T = (V, E')$ *strom* (tj. souvislý graf bez kružnic) takový, že $E' \subseteq E$, je T *kostra* G .

Příklady

1. Dokážete následující obrazec rozdělit na pět shodných částí? Vrcholy jsou umístěny v bodech celočíselné mřížky, jak je znázorněno na obrázku.



2. (*Princip sudosti*): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

3. Je-li $G = (V, E)$ souvislý graf s $|V| \geq 2$, pak existují $u \neq v \in V$ takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.
4. Doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. (Je doplněk každého souvislého grafu nesouvislý?)
5. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně?
6. Kolik nejvíce a nejméně listů může mít strom na n vrcholech, který má stupně pouze 1 a 3?
7. Kolik má $K_{2,n}$ různých koster?
8. Kolik nejméně a nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a právě k komponentami souvislosti?
9. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.
10. Na opuštěném ostrově žije 1000 Matfyzáků, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči, a jeden ČVUŤák. Každý člověk vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná barvu svých očí. Aby se nenudili, hrají takovou hru, že kdykoli někdo zjistí, jakou má barvu očí, musí se ještě ten den zabít. Jednoho dne přijela návštěva a, nevědouc o té hře, při odjezdu prohlásila: „*To jsem ráda, že vidím osobu s modrýma očima.*“ Jaký dopad to bude mít, pokud má ČVUŤák hnědé oči? A co když má oči modré?
11. Máme osm kuliček, které vypadají úplně stejně, jen jedna je o trochu těžší než ostatní, které potom stejně i váží. Dokážete s pomocí pouhých dvou vážení na rovnoramenných vahách najít tu těžší?