Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #9 – Ramseyovky

Třetí sada domácích úkolů

Deadline: **15. 12. 2022** (v 9:00)

Řešení ve formátu PDF pošlete mailem na `matej@kam.mff.cuni.cz`. Ideálně LaTeX, můžete ale použít cokoliv jiného (exportovaného do PDF) včetně scanu ručního řešení. Moc vás ale prosím o dobře čitelná řešení.

1. Kolik koster má graf, složený z úplného grafu K_n a cyklu C_m, které sdílejí právě jednu hranu (tj. vezmeme cyklus za dva vrcholy spojené hranou a ty identifikujeme s nějakými dvěma vrcholy kliky). Pro pořádek, je-li $n = m = 3$, tak odpověď je 8 (doufám :D).
2. Graf G má 360 vrcholů a každý jeho vrchol má stupeň 3 nebo 4. Každý vrchol stupně 3 sousedí se dvěma vrcholy stupně 3 a s jedním vrcholem stupně 4. Každý vrchol stupně 4 sousedí s jedním vrcholem stupně 3 a se třemi vrcholy stupně 4. Určete počet hran grafu G.
3. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ obsahuje orientované cesty $u \to v$ i $v \to u$. Ukažte, že orientovaný graf G je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V(G)$ vychází alespoň jedna hrana do $V \setminus X$.

Příklady

1. Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.
2. (**Schurova věta**.) Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$ a navíc x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.
3. (**Erdösovo–Szekeresovo lemma o podposloupnostech**.)
   (a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v každé posloupnosti N různých přirozených čísel najdeme rostoucí nebo klesající podposloupnost délky n. *(Hint: Ramseyova věta.)*
   (b) Dokažte, že v každé posloupnosti $(n-1)(m-1)+1$ různých přirozených čísel najdeme rostoucí podposloupnost délky n nebo klesající délky m. *(Může i teď fungovat Ramseyova věta?)*
   (c) Najděte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.
4.
   (a) Sestrojte libovolně velké $\{0, 1\}$-matice, které neobsahují 2×2 matici se samými nulami ani se samými jedničkami jako *diagonální podmatici*. Matice A o rozměrech $n \times n$ je *diagonální podmatice* $N \times N$ matice B, pokud existuje $R \in \binom{[N]}{n}$ takové, že A dostaneme z B, když vybereme řádky i sloupce s indexy z R.
   (b) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $DM(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále stejné, všechny prvky nad diagonálou stejné a všechny prvky pod diagonálou stejné.
   (c) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje jen nuly nebo jen jedničky.