

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #8 – Uši, kostry a dvojpočítání

Vzpomeňte si na přednášku, že počet koster úplného grafu K_n je n^{n-2} , počet koster K_n , které obsahují jednu pevně danou hranu, je $2n^{n-3}$ a počet koster úplného grafu K_n , kterému chybí jedna hrana, je $(n-2)n^{n-3}$.

Příklady

1. Dokažte, že v hranově 2-souvislém grafu leží každý vrchol na nějaké kružnici.
2. Graf je k -regulární, má-li všechny stupně rovné k .
 - (a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k -regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
 - (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
 - (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
3. Kolik koster mají:
 - (a) Strom,
 - (b) cyklus délky n ,
 - (c) úplný graf K_n s jednou hranou podrozdělenou,
 - (d) úplný graf K_n se všemi hranami podrozdělenými,
 - (e) úplné grafy K_n a K_m slepené za vrchol,
 - (f) cykly délky n a m slepené za hranu?
4. Dokažte následující identity: (*úloha je na počítání dvěma způsoby, níž jsou hinty, co chcete počítat*)
 - (a) $\sum_{i=d}^n \binom{n}{i} \binom{i}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{n-d}$,
 - (b) $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$.

Hinty na double-counting (nečíst, přemýšlet!)

Spočítejte dvěma způsoby následující věci:

- (a) Možnosti, jak může n kamarádů založit akciovou společnost, která musí mít právě d lidí v představenstvu a potom – potenciálně – nějaké pracovníky,
- (b) možnosti, jak vybrat n čísel z $\{1, \dots, 2n\}$; zkuste si ta čísla rozdělit na sudá a lichá a vzpomeňte si, že $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.