Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #7 – Souvislost grafů a trochu párování

Druhá sada domácích úkolů

Deadline: **1. 12. 2022** (v 9:00)

Řešení ve formátu PDF pošlete mailem na `matej@kam.mff.cuni.cz`. Ideálně LaTeX, můžete ale použít cokoliv jiného (exportovaného do PDF) včetně scanu ručního řešení. Moc vás ale prosím o dobře čitelná řešení.

1. Nechť G je vrcholově k-souvislý graf. Dokažte, že pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq V(G)$ velikosti k existuje k vrcholově disjunktních cest z A do B (úplně disjunktních, nesmí sdílet ani počáteční či koncové vrcholy – každý vrchol z A i z B tedy bude použitý v právě jedné z nich).
2. Dokažte, že každý strom obsahuje nejvýše jedno perfektní párování (tj. párování obsahující všechny vrcholy).

Opakování: Hallova věta

Nechť X a I jsou množiny. *Množinový systém* na X je $|I|$-tice $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. Všimněte si, že se může stát $M_i = M_j$ pro $i \neq j$. *Systém různých reprezentantů* pro $\mathcal{M}$ je **prostá** funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ máme $f(i) \in M_i$. Pokud nebude řečeno jinak, předpokládáme, že $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i jsou konečné.

Věta 1 (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ platí následující (Hallova) podmínka*

$$\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \,.$$

Párování v grafu $G = (V, E)$ je množina $F \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ patří do nejvýše jedné hrany z F.

Věta 2 (Hallova věta pro bipartitní grafy)**.** *Mějme bipartitní graf G s partitami A a B a hranami E. Pro $a \in A$ označíme jako $N(a)$ množinu všech jeho sousedů (v B), tj. $N(a) = \{b \in B : ab \in E\}$. Potom v G existuje párování, které každému vrcholu z A přiřadí nějaký vrchol z B, právě tehdy, když pro každé $X \subseteq A$ platí*

$$\left| \bigcup_{a \in x} N(a) \right| \geq |X| \,.$$

Opakování: Souvislost grafů

Buď $G = (V, E)$ graf. G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez G* je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez G* je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G[V \setminus C]$ je nesouvislý (kde $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$) je graf, který G *indukuje* na A).

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. *Vrcholová souvislost G* ($k_v(G)$) je $k - 1$, pokud $G \simeq K_k$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je *vrcholově (resp. hranově) k-souvislý*, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Z přednášky víme, že $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$.

Věta 3 (Fordova–Fulkersonova věta)**.** *$k_e(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k hranově disjunktních cest.*

Věta 4 (Mengerova věta)**.** *$k_v(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k vrcholově disjunktních cest (u a v samozřejmě sdílejí).*

Příklady

1. Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf ($k \geq 1$) má perfektní párování. (Graf je k-regulární, pokud každý stupeň je roven k.)
2. Najděte příklad grafu, kde lze odebrat vrchol tak, že
   (a) hranová souvislost vzroste (klesne) o libovolné předem dané číslo,
   (b) vrcholová souvislost vzroste o libovolné předem dané číslo. O kolik může $k_v(G)$ klesnout?
3. Dokažte následující tvrzení pro vrcholově k-souvislý graf $G = (V, E)$: Pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů A takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x.
4. Graf je *k-regulární*, má-li všechny stupně rovné k.
   (a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
   (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
   (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
5. Buď Q_k hyperkrychle (tj. $Q_k = (\{0,1\}^k, E)$ a $x, y \in E$, právě když se x, y liší na právě jedné pozici). Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.