Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #6 – Toky a trochu párování

Opakování: Toky v sítích

(Pokud jste používali na nějaké přednášce jinou terminologii, tak na své samozřejmě nijak netrvám.)

Síť $N = (V, E, c, s, t)$ je pětice, kde (V, E) je orientovaný graf, c je funkce $E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ udávající *kapacity* hran a s a t jsou vrcholy grafu — *zdroj* (*source*) a *stok* (*target*). *Tok* v N je funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ taková, že pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \leq f(e) \leq c(e)$ a pro každý vrchol $v \in V \setminus \{s, t\}$ platí

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u),$$

neboli „co do vrcholu vteče, to z něj i vyteče“. *Velikost toku* f definujeme jako

$$|f| = \sum_{(u,t)\in E} f(u, t) - \sum_{(t,u)\in E} f(t, u).$$

Cesta (ne nutně orientovaná, tj. mluvíme o posloupnosti hran takové, že každé dvě sousední hrany sdílejí vrchol, ale nemusí to být druhý vrchol první hrany a první vrchol druhé hrany) je *nasycená*, pokud pro nějakou její hranu e platí jedna ze dvou možností

1. e je orientovaná po směru cesty a $f(e) = c(e)$ nebo
2. e je orientovaná proti směru cesty a $f(e) = 0$.

Jako *rezervu* hrany e (vzhledem k nějaké cestě) označíme $r(e) = c(e) - f(e)$, pokud je e orientovaná po směru cesty, a $r(e) = f(e)$ jinak. Tj. cesta je nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy. *Řez* je podmnožina hran taková, že po jejím odstranění neexistuje cesta z s do t, a *kapacita* řezu R je $\sum_{e\in R} c(e)$.

Ford–Fulkerson

$N = (V, E, c, s, t)$ je síť.

1. $f \leftarrow$ nulový tok
2. Dokud existuje nenasycená (*zlepšující*) cesta P z s do t:
   (a) $d \leftarrow \min_{e\in P} r(e)$
   (b) Zvětšíme tok f podél P o d (tj. každé hraně $e \in P$ zvětšíme/zmenšíme $f(e)$ o d podle toho, jakým směrem e vede).

„Opakování dopředu“: Hallova věta

Nechť X a I jsou množiny. *Množinový systém* na X je $|I|$-tice $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. Všimněte si, že se může stát $M_i = M_j$ pro $i \neq j$. *Systém různých reprezentantů* pro $\mathcal{M}$ je **prostá** funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ máme $f(i) \in M_i$. Pokud nebude řečeno jinak, předpokládáme, že $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i jsou konečné.

Věta 1 (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ platí následující (Hallova) podmínka*

$$\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| \geq |J|\,.$$

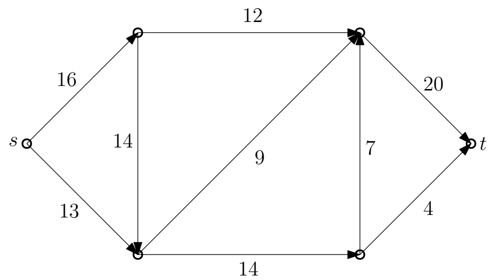
Párování v grafu $G = (V, E)$ je množina $F \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ patří do nejvýše jedné hrany z F.

Věta 2 (Hallova věta pro bipartitní grafy)**.** *Mějme bipartitní graf G s partitami A a B a hranami E. Pro $a \in A$ označíme jako $N(a)$ množinu všech jeho sousedů (v B), tj. $N(a) = \{b \in B : ab \in E\}$. Potom v G existuje párování, které každému vrcholu z A přiřadí nějaký vrchol z B, právě tehdy, když pro každé $X \subseteq A$ platí*

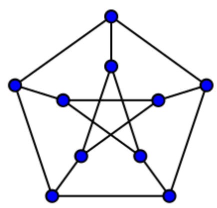
$$\left| \bigcup_{a \in x} N(a) \right| \geq |X| \,.$$

Příklady

1. Najděte maximální tok a odpovídající řez nejmenší kapacity v následující síti. (Pokud bojujete s F–F algoritmem, doporučuju zkusit si ho ručně odkrokovat.)



2. Dokažte, že každá síť má buď právě jeden maximální tok, anebo jich má nekonečně mnoho. (Tedy nemůže mít například právě dva různé maximální toky.)
3. V definici toku omezujeme kapacitu hran. Občas by se ale hodilo omezit i kapacitu nějakých vrcholů. Jak takový tok najít? (Najděte algoritmus, který na vstupu dostane síť s omezenými kapacitami vrcholů a vrátí maximální tok v ní. Váš algoritmus samozřejmě může používat různé algoritmy na hledání maximálních toků v klasických sítích.)
4. Buďte rádi, že jsem udělal jen dvě iterace. (Nebo by to moc práce nepřidalo?)
   (a) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ systém různých reprezentantů?
   (b) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ systém různých reprezentantů?
   (c) (Bonus.) Pro která $k, n \in \mathbb{N}$ má systém všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ systém různých reprezentantů?
5. *Perfektní párování* je párování F takové, že každý vrchol patří do právě jedné hrany F.
   (a) Najděte 6 různých perfektních párování v Petersenově grafu a dokažte, že zádná další neexistují.



   (b) Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf ($k \geq 1$) má perfektní párování. (Graf je k-regulární, pokud každý stupeň je roven k.)
6. Najděte spočetně nekonečný bipartitní graf, který splňuje Hallovu podmínku, ale nemá perfektní párování.

Hinty

Fakt jste se nad příkladem pořádně zamysleli? :P

1. Síť je malá, takže by se maximální tok i nejmenší řez měly dát prostě vykoukat :). (Mají velikost 24, podívejte se ke stoku.)

2. Chcete dokázat, že jakmile máte nějaké dva různé maximální toky, tak jich z nich umíte vytvořit nekonečně mnoho.

   Vzpomeňte si, že tok můžeme popsat jako nějaký vektor v $\mathbb{R}^m$ – pro každou z m hran si napíšeme, kolik přes ní teče. Pokud máme dva toky $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a nějaké číslo $0 \leq \lambda \leq 1$, rozmyslete si, že $\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}$ je také tok. Jakou má velikost?

3. Každý vrchol v si rozdělte na dva, v_{in} a v_{out}, do v_{in} natáhněte všechny hrany vedoucí **do** v, z v_{out} natáhněte všechny hrany vedoucí **z** v a nakonec natáhněte hranu $v_{in} \to v_{out}$ se stejnou kapacitou, jakou měl mít vrchol v. Najděte tok v téhle síti.

4. Pokud je odpověď ano, tak ten systém prostě najděte. Pokud je odpověď ne, ukažte, že Hallova podmínka není splněna.

5.

   (a) Chytrý rozbor případů podle toho, kolik/které hrany mezi „vnější pěticí“ a „vnitřní pěticí“ vrcholů jsou v párování. Musí jich být lichý počet (kdyby jich třeba bylo nula, tak pět vnějších vrcholů musí být spárovaných mezi sebou, což nejde, protože jich je liše.) Když je právě jedna, tak už to jednoznačně určuje zbytek perfektního párování. Když všech pět, pak už máme perfektní párování. Když právě tři, tak jsou buď všechny sousední (a pak je vidět, že to nejde doplnit), anebo dvě sousední a jedna protější (a pak je zase vidět, že zbylé čtyři vrcholy mezi sebou spárovat nelze).

   (b) Dokažte, že splňuje Hallovu podmínku: Vezměte si libovolnou podmnožinu X vrcholů v jedné partitě a podívejte na podgraf mezi X a $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$. V tomto podgrafu má každý vrchol X stupeň k (protože jsme tam dali všechny jeho sousedy) a každý vrchol $N(x)$ stupeň nejvýše k (protože v celém grafu má stupeň právě k). Protože každá hrana vede mezi vrcholem X a $N(X)$, plyne z toho, že $|N(X)| \geq |X|$, tedy Hallova podmínka je splněna a existuje párování, které využije všechny vrcholy jedné partity. To, že jste ve skutečnosti dostali perfektní párování, plyne z toho, že obě partity musí být stejně velké (spočítejte počet hran jako součet stupňů jedné resp. druhé partity).

   Bonus: Ukažte, že z toho plyne, že každý k-regulární bipartitní graf umíme rozdělit na k hranově disjunktních perfektních párování.

6. Začněte s bipartitním grafem, který je prostě jen párování mezi dvěma nekonečnými množinami. Teď do jedné z nich přidejte vrchol a spojte ho se všemi vrcholy té druhé. Má takovýhle graf perfektní párování? Splňuje Hallovu podmínku?