Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #4 – Vytvořující funkce naposledy

První sada domácích úkolů

Deadline: **3. 11. 2022** (v 9:00)

Řešení ve formátu PDF pošlete mailem na `matej@kam.mff.cuni.cz`. Ideálně LaTeX, můžete ale použít cokoliv jiného (exportovaného do PDF) včetně scanu ručního řešení. Moc vás ale prosím o dobře čitelná řešení.

0. Rozhodněte se, jestli chcete, abych vaše body zveřejňoval na webu pod přezdívkou. Pokud ano, pošlete mi souhlas a nějakou přezdívku. [**0 bodů**]
1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ rozhodněte, zda je větší $\binom{16n}{n}$ nebo $\binom{4n}{2n}$. (Hint: Napište si všechny odhady na obě čísla, které znáte, a podívejte se, jestli mezi spodním odhadem jednoho a horním odhadem druhého neumíte dokázat správnou nerovnost.)
2. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pro $n \geq 0$.
3. Ideální zápočtová písemka z Kombinatoriky a grafů 1 má celkem $n \in \mathbb{N}$ příkladů. Z toho jsou alespoň 3 a nejvýše 6 na vytvořující funkce a lichý počet jich je na projektivní roviny, pak je ještě potřeba mít alespoň jeden příklad na toky a alespoň jeden na Ramseyovky. Pokud označíme jako a_n počet ideálních zápočtových písemek, najděte pro posloupnost (a_n) vytvořující funkci (bez nekonečných sum).

Příklady

1. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin – jahodovou, citronovou a čokoládovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři čokoládové kopečky? (Na pořadí kopečků nezáleží.)
2. **Těžší:** Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin – jahodovou, citronovou a čokoládovou. Zrovna dnes máte chuť na zmrzlinu, která má nejprve několik jakodových, potom několik citronových a nakonec několik čokoládových kopečků, přičemž od každého druhu chcete alespoň dva, čokoládové chcete nejvíce tři a citronových chcete sudý počet. Zároveň do právě jednoho jahodového kopečku chcete zapíchnout deštníček. Kolik máte způsobů, jak si objednat zmrzlinu o n kopečcích? (Najděte vytvořující funkci pro tuto posloupnost.)
3. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \geq 0$.
4. **Těžší:** Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$ pro $n \geq 0$.
5. Určete koeficienty u mocnin x v zadaných výrazech a vyjádřete je ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená p, q (a to ne tak, že ta čísla spočítáte a pak najdete, kterému binomickému koeficientu se rovnají):
   (a) U členu x^{14} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,
   (b) u členu x^3 ve výrazu $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ (v příslušné mocninné řadě).
6. Spočítejte počet způsobů, jak rozdělit konvexní n-úhelník pomocí $n - 3$ úhlopříček na trojúhelníky. (Abychom měli stejné definice, pro $n = 4$ je výsledek 2 a pro $n = 5$ je výsledek 5.) Doporučuju nejdřív vymyslet rekurenci a pak se zamyslet, jestli jste něco takového náhodou už neviděli na přednášce ;).
7. **Těžší:** Nechť $f(x)$ je vytvořující funkce pro posloupnost (a_n). Spočítejte, jakou posloupnost vytváří funkce $f(\frac{1}{1-x} - 1)$ (tj. $f(x + x^2 + \cdots)$). Pokud to pro vás je příliš jednoduché, udělejte to obecně pro skládání vytvořujících funkcí $f(g(x))$, kde $g(0) = 0$.