Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #3 – Vytvořující funkce II

Na druhé straně jsou hinty. Doporučuju je ale číst až poté, co se nad příklady opravdu pořádně zamyslíte :).

Příklady

1. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin – jahodovou, citronovou a čokoládovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři čokoládové kopečky? (Na pořadí kopečků nezáleží.)
2. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \geq 0$.
3. Určete koeficienty u mocnin x v zadaných výrazech a vyjádřete je ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená p, q (a to ne tak, že ta čísla spočítáte a pak najdete, kterému binomickému koeficientu se rovnají):
   (a) U členu x^{14} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,
   (b) u členu x^6 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$ (v příslušné mocninné řadě).
4. Spočítejte počet způsobů, jak rozdělit konvexní n-úhelník pomocí $n - 3$ úhlopříček na trojúhelníky. (Abychom měli stejné definice, pro $n = 4$ je výsledek 2 a pro $n = 5$ je výsledek 5.) Doporučuju nejdřív vymyslet rekurenci a pak se zamyslet, jestli jste něco takového náhodou už neviděli na přednášce ;).

Hinty

Fakt jste se nad příkladem pořádně zamysleli? :P

1. Samozřejmě se to dá udělat hrubou silou. Pokud použijete vytvořující funkce, tak odpověď "koeficient u x^{42} v té a té mocninné řadě" je úplně skvělá. Pokud nevíte, jak na to, podívejte se na zápisky ze druhé přednášky, tam se řešil podobný příklad.

2. Tohle je homogenní lineární rekurentní rovnice. Na druhé přednášce se našel explicitní vzorec pro Fibonacciho čísla, tak ze zápisků pochopte, jak se ten výpočet dělal, a jemně ho upravte pro tuto rovnici. (Takovýhle příklad by se také mohl objevit v domácím úkolu O:).)

3. Použijte zobecněnou binomickou větu (a ve druhém případě ještě lépe její důsledek pro záporné celočíselné exponenty). V prvním příkladu se vám bude hodit nejdřív najít explicitní vzorec pro tuhle vytvořující funkci, tj. rozmyslet si, jaké operace chcete použít na posloupnost samých jedniček (totiž $\frac{1}{1-x}$), abyste dostali tohle – tak, jak jsme to dělali na minulém cvičení.

4. Představte si, že nejdříve nakreslíte jednu úhlopříčku. Ta vám to rozdělí na dva menší konvexní úhelníky, každý z nich potřebujete rozdělit na trojúhelníky, děláte to úplně nezávisle (a z rekurence už víte, kolika možnostmi to jde).

   Je potřeba rozmyslet si, jak započítat každou možnost právě jednou. To doporučuju například tak, že si vrcholy očíslujete třeba podle směru hodinových ručiček a budete dělit podle úhlopříčky, která vede z jedničky do vrcholu s nejmenším číslem. Jediný případ, kdy z jedničky žádná úhlopříčka nevede, je ten, kdy jste jedničku "usekli" úhlopříčkou mezi vrcholy n a 2.

   Až napíšete rekurenci, rozmyslete si, že až na "posun n" je to ta samá rekurence jako pro Catalanova čísla, tedy měli byste dostat, že počet možností pro n-úhelník je C_{n-2}. (Pokud jsem pokazil index, tak si to opravte – víte, jak tahle posloupnost začíná, tak je prostě potřeba ten začátek na Catalanova čísla správně namatchovat.)

   Bonus: Dokážete najít nějakou pěknou bijekci mezi těmihle triangulacemi n-úhelníků a počtem binárních zakořeněných stromů na $n-2$ vrcholech?