

# Kombinatorika a grafy 1

## Cvičení #2 – Vytvořující funkce

Vytvořující funkce pro posloupnost  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  je mocninná řada  $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ . Například  $\frac{1}{1-x}$  je vytvořující funkce pro  $(1, 1, \dots)$  a  $(1+x)^n$  je vytvořující funkce pro  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots)$  (protože pro  $k > n$  platí  $\binom{n}{k} = 0$ ). Pochopitelně, pokud  $a(x)$  konverguje na nějakém okolí nuly, tak je takový přechod mezi formálními mocninnými řadami a skutečnými funkcemi legální, protože všechny členy  $a_i$  nějak odpovídají derivacím v nule. Speciálně pokud existuje  $K$  takové, že  $|a_n| \leq K^n$  pro každé  $n$ , tak má  $a(x)$  nenulový poloměr konvergence.

## Příklady

1. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin – jahodovou, citronovou a čokoládovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři čokoládové kopečky? (Na pořadí kopečků nezáleží.)
2. Necht'  $(a_i), (b_i)$  jsou posloupnosti,  $a(x), b(x)$  jejich vytvořující funkce,  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $k$  přirozené. Vyrobtě si tabulku (z hlavy, bez konzultace poznámek z přednášky), jakou posloupnost vytváří funkce:  $a(x)+b(x)$ ,  $\alpha a(x)$ ,  $x^k a(x)$ ,  $a(x^k)$ ,  $a'(x)$ ,  $\int_0^x a(t)dt$ ,  $a(x)b(x)$  a  $\frac{a(x)-a_0-a_1x-\dots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$ .
3. Najděte vytvořující funkce (v uzavřeném tvaru) pro následující posloupnosti:  $(0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$ ,  $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$ ,  $(1, 4, 9, 16, \dots)$ ,  $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$  (tj. součty prvních  $i$  kladných sudých čísel).
4. Zjistěte, čemu se rovná  $a_n$ , které je zadané rekurentní rovnicí  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$  pro  $n \geq 0$ .
5. Určete koeficient u členu  $x^{14}$  ve výrazu  $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$ . **Těžší:** Vyjádřete jej ve tvaru  $\binom{p}{q}$  pro nějaká přirozená  $p, q$  (a to ne tak, že to číslo spočítáte a pak najdete, kterému binomickému koeficientu se rovná).