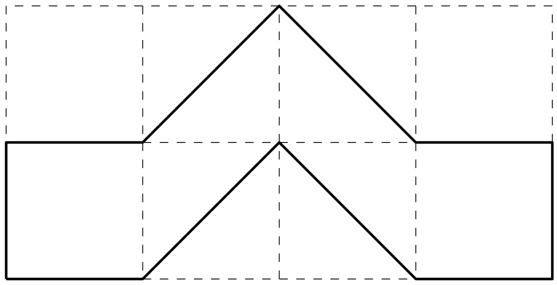
Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #1 – Základy & odhady faktoriálu a kombinačních čísel

Příklady

Kdy vám něco není jasné, nebojte se ptát, je hloupost řešit špatný příklad ;).

1. Dokážete následující obrazec rozdělit na pět shodných částí? Vrcholy jsou umístěny v bodech celočíselné mřížky, jak je znázorněno na obrázku.

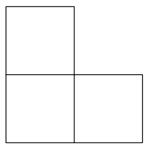


2. Rozmyslete si, že platí následující identity:
   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (d) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
   (e) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ (f) $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

3. Rozhodněte, zda platí
   (a) $n! \in 2^{\mathcal{O}(n)}$
   (b) $n! \in 2^{\Omega(n)}$
   (c) $n^2 + 2n\ln(n) \in n^2(1 + o(1))$
   (d) **Těžší:** $\sum_{i=0}^{n} n^k \in \Omega(n^{k+1})$ pro $k \in \mathbb{N}$

4. **Těžší:** Obdobně jako na přednášce pro celá čísla spočítejte, zda se náhodná procházka nekonečněkrát vrátí do počátku v $\mathbb{Z}^2$ resp. $\mathbb{Z}^3$.

5. Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na níž chybí jedno rohové políčko. Dokažte, že ji jde celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:



6. Na opuštěném ostrově žije 1000 Matfyzáků, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči, a jeden ČVUŤák. Každý člověk vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná barvu svých očí. Aby se nenudili, hrají takovou hru, že kdykoli někdo zjistí, jakou má barvu očí, musí se ještě ten den zabít. Jednoho dne přijela návštěva a, nevědouc o té hře, při odjezdu prohlásila: *„To jsem ráda, že vidím osobu s modrýma očima.“* Jaký dopad to bude mít, pokud má ČVUŤák hnědé oči? A co když má oči modré?

7. Máme osm kuliček, které vypadají úplně stejně, jen jedna je o trochu těžší než ostatní. Dokážete s pomocí pouhých dvou vážení na rovnoramenných vahách najít tu těžší?