

# Matematická analýza I

## Druhá série domácích úkolů

**Deadline** 1. 4. v 9:00. Řešení ve formátu PDF pošlete mailem na [matej@kam.mff.cuni.cz](mailto:matej@kam.mff.cuni.cz). Ideálně  $\text{\LaTeX}$ , můžete ale použít cokoliv jiného (exportovaného do PDF) včetně scanu ručního řešení. Moc vás ale prosím o dobře čitelná řešení. Pokud není řečeno jinak, můžete bez důkazu používat všechno, co se říkalo na prvních šesti přednáškách a cvičeníh, ale nezapomeňte zmínit, co používáte, a pečlivě ověřit předpoklady!

Můžete využívat, co znáte o funkcích  $\exp$ ,  $\ln$  nebo o goniometrických a cyklometrických funkcích (tj. základní vztahy, definiční obor, spojitost atp.).

1. Rozhodněte a dokažte, zda resp. k čemu konvergují následující řady: [**1 bod**]

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ ,      (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2} + 3^{n+1}}{5^n}$ .

2. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení. [**2 body**]

(a) Každá prostá funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (tj.  $f(x) = f(y) \implies x = y$ ) je rostoucí nebo klesající.

(b) Každá rostoucí funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je prostá.

(c) Existuje nekonstantní omezená monotónní (tj. rostoucí nebo klesající) funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(d) Existuje prostá funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která je periodická (tj. existuje  $p > 0$  takové, že  $f(x) = f(x+p)$  pro všechna  $x$ ).

3. Dokažte z definice limity, že  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty$ . [**1 bod**]

4. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady: [**2 body**]

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 8x + 7}$ ,      (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x}$ ,      (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot\left(\frac{1}{x}\right)$ ,      (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(x)}}$ ,

5. Určete limity funkce  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$  v  $\pm\infty$  a všech bodech mimo definiční obor (nebo dokažte, že neexistují). Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady: [**2 body**]