

Matematická analýza I

Cvičení #8 – l'Hospital, extrémny funkcí, průběh funkcí

Příklady

1. Spočítejte následující limity

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$,

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$,

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$,

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x)$,

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$,

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \ln(x + 1)$,

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$,

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$,

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\cot(x)^2}$.

2. Najděte lokální a globální extrémny následujících funkcí:

(a) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, (b) x^3 definované na $[-1, 1]$, (c) x^3 definované na $(-1, 1)$, (d) $x^{\frac{1}{x}}$
pro $x > 0$, (e) $x^2 e^{-x}$, (f) $\arccos(x)$.

3. Dokažte následující nerovnosti:

(a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$,

(b) pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$,

(c) pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$,

(d) pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin(x) \leq x$.

4. Vyřešte následující úlohy:

(a) Který z obdélníků o obvodu ℓ má největší obsah?

(b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

(c) Ze čtvercového papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby krabička měla největší možný objem?

5. Vyšetřete průběh následujících funkcí (to jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity a asymptoty, lokální i globální maxima i minima a vyšetřete konvexitu):

(a) $x^3 - 12x + 16$, (b) $(\ln(x))^2$, (c) $e^{-|x|}$, (d) $x + \cos(x)$, (e) $x^2 e^{-x}$, (f) $\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.