

Matematická analýza I

Cvičení #7 – Derivace

Pravidla

Pokud není řečeno jinak, můžete využívat (po ověření předpokladů) všechny vaše znalosti o limitách a všechna tvrzení uvedená ve skriptech k sedmé přednášce. Za známé můžete používat následující derivace, ostatní je třeba odvodit: (Tvrzení platí samozřejmě jen tam, kde dávají smysl.)

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$,
2. $\exp(x)' = \exp(x)$,
3. $\sin(x)' = \cos(x)$,
4. $\cos(x)' = -\sin(x)$,
5. $\ln(x)' = \frac{1}{x}$.

Příklady

1. Z definice spočítejte následující derivace:

- (a) $\frac{1}{x^2}$ v bodě -1 ,
- (b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$.

2. Spočítejte derivace následujících funkcí ve všech bodech, kde existují (nemusíte počítat jednostranné derivace v krajních bodech).

- (a) x^r , $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$,
- (b) $\tan(x)$ pro $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- (c) $\arccos(x)$,
- (d) $\arctan(x)$,
- (e) $\frac{x-1}{x+1}$,
- (f) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$,
- (g) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,
- (h) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$,
- (i) $\sqrt{\sin(x)}$,
- (j) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$,
- (k) $\ln(\sin(x))$,
- (l) x^x ,
- (m) $x^{\frac{1}{x}}$,
- (n) $e^{\sqrt{x+1}}$,
- (o) $\cos(x)^{\sin(x)}$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- (p) $x|x|$,
- (q) $10x^{2020} + 17x^7 - 42x^2 + 5 - \frac{1}{x}$,
- (r) $\arcsin(\sin(x))$,
- (s) $\arctan(\ln(x))$.

3. Spočítejte derivaci funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve všech bodech, kde existuje, kde f je definovaná jako

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0. \end{cases}$$

Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

Prostě to udělejte. U výpočtu z definice je třeba napsat definici a tu limitu vypočítat. U poslední úlohy musíte udělat extra práci v bodě 0, kde je třeba spočítat nějaké limity. U prostřední úlohy si vzpomeňte na to, co všechno víte o derivacích (součet, součin, podíl, složená funkce, inverzní funkce, ...). Taký se hodí vědět, že $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$