Matematická analýza I

Cvičení #6 – Limity

Pravidla

Můžete využívat, co znáte o funkcích exp, ln nebo o goniometrických a cyklometrických funkcích (tj. základní vztahy, definiční obor, spojitost atp.), co se jejich limit týče, můžete využívat následující fakty (později se k nim vrátíme, až je budete umět dokázat pomocí l'Hospitalova pravidla).
1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, 3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Příklady

1. Dokažte z definice limity následující tvrzení:
   (a) $\lim_{x\to 3} x^2 - 3 = 6$, (b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$.

2. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$, (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$, (c) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$, (d) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$.

3. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}$.

4. Určitě limity následujících funkcí v $\pm\infty$ a všech bodech mimo definiční obor (nebo dokažte, že neexistují). Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
   (a) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x}$, (b) $\frac{3x^2+1}{2x^2+1}$, (c) $\frac{2x^2+1}{x^3+1}$, (d) $\frac{2x^2+1}{x^2-1}$, (e) $\frac{x^2}{\cos(x)+1}$.

5. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
   (a) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}$, (c) $\lim_{x\to +\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x^2+4}\right)$, (d) $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}$.
   (e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

6. Rozhodněte, zda jdou následující funkce spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}$, a pokud ano, udělejte to.
   (a) $\frac{3x}{x^5+5x}$, (b) $\ln(\frac{1}{x^2})$, (c) $\frac{1}{\ln(x^2+1)}$.

7. Dokažte následující variantu věty o limitě složené funkce:

   Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující $\lim_{x\to A} g(x) = B$ a nechť existuje $\delta > 0$ taková, že pokud $x \in P(A, \delta)$, pak $g(x) > B$. Nechť $f(x)$ je funkce splňující $\lim_{x\to B^+} f(x) = C$. Potom $\lim_{x\to A} f(g(x)) = C$.

Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

1. Přečtěte si definice, pochopte, co znamenají a pak to udělejte.

2. Člověk by chtěl zkusit použít větu o limitě podílu a dosadit, ale dostane výrazy typu $\frac{0}{0}$. To ale znamená, že to, k čemu limitíme (řekněme a), je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, neboli oba jsou tvaru $(x-a)P(x)$. Vzpomeňte si na střední školu na dělení polynomů, kořen vytkněte, zkraťte a zkuste to znovu :).

3. Když limita neexistuje, zkuste použít Heineho. Pokud existuje, půjde to z definice.

4. Už znáte docela dost tvrzení: Aritmetiku limit, větu o limitě složené funkce, větu o dvou policajtech pro limity, ... Někdy pomůže, že $a = e^{\ln(a)}$ taky se může hodit, že $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$.

5. Je potřeba umět najít definiční obor a počítat limity. Pro podíl polynomů to umíte, u té funkce s kosinem je třeba si s tím pohrát a třeba si nechat vyrobit graf.

6. Nejdřív je potřeba zjistit, ve kterých bodech nejsou funkce definované a pak zjistit, jestli v nich mají limitu.

7. Okopírujte důkaz věty o limitě složené funkce s tím, že na některých místech použijete jednostranná okolí. (Speciálně to, že $x \in P(A, \delta)$, pak $g(x) > B$ společně s $\lim_{x\to A} g(x) = B$ implikuje, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta' > 0$ takové, že $x \in P(A, \delta') \Rightarrow g(x) \in P^+(B, \epsilon)$.