Matematická analýza I

Cvičení #5 – Funkce

Příklady

1. Dokažte z definice limity následující tvrzení:
   (a) $\lim_{x\to a} x = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, (b) $\lim_{x\to 3} x^2 - 3 = 6$, (c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$.

2. Dokažte, že všechny polynomy jsou spojité. To jest, pokud $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ je polynom a $b \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to b} P(x) = P(b)$.

3. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$, (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$, (c) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$, (d) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$.

4. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}$.

Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

1. Přečtěte si definice, pochopte, co znamenají a pak to udělejte.
2. Využitím věty o limitě součtu dostaňte, že to stačí dokázat pro polynomy tvaru $a_n x^n$. Pak použijte větu o limitě součinu a uvědomte si, že to stačí pro polynomy tvaru x^n. No a teď stačí použít indukci a limitu o aritmetice součinu, protože $x^n = x \cdot x^{n-1}$ (viz také úkol 1a).
3. Člověk by chtěl zkusit použít větu o limitě podílu a dosadit, ale dostane výrazy typu $\frac{0}{0}$. To ale znamená, že to, k čemu limitíme (řekněme a), je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, neboli oba jsou tvaru $(x-a)P(x)$. Vzpomeňte si na střední školu na dělení polynomů, kořen vytkněte, zkraťte a zkuste to znovu :).
4. Když limita neexistuje, zkuste použít Heineho. Pokud existuje, půjde to z definice.