

# Matematická analýza I

## Cvičení #2 – Posloupnosti

### Příklady

- Rozhodněte (a dokažte), zda následující posloupnosti mají vlastní limitu  
(a)  $a_n = n^2$       (b)  $a_n = \sin(n^\circ)$
- Nechť  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou posloupnosti takové, že mají vlastní limity  $A$  resp.  $B$ . Dokažte, že  $a_n + b_n$  má limitu  $A + B$ .
- Najděte příklady posloupností  $(a_n)$  a  $(b_n)$  takové, že mají limity  $+\infty$  resp.  $-\infty$  a  $a_n + b_n$   
(a) nemá limitu,      (b) má limitu  $+\infty$ ,      (c) má limitu  $-\infty$ ,      (d) má limitu  $x \in \mathbb{R}$ .
- Spočítejte z definice limity následujících posloupností, nebo dokažte, že neexistují:  
(a)  $n^2 + 3$ ,      (b)  $\frac{n+1}{n+2}$ ,      (c)  $\frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$ ,      (d)  $\frac{\sqrt{n}}{n^3+2}$ ,      (e)  $\sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$
- Dokažte, že pokud  $\lim a_n > \lim b_n$  (speciálně obě existují), potom existuje  $n_0$  takové, že  $(\forall n)(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b_n)$ .
- Dokažte, že pokud  $a_n > b_n$  pro všechna  $n \geq n_0$  (kde  $n_0$  je nějaká konstanta) a  $a_n$  i  $b_n$  mají limitu, potom  $\lim a_n \geq \lim b_n$ . Může nastat rovnost  $\lim a_n = \lim b_n$ ?
- Rozmyslete si, jaké implikace platí mezi “posloupnost je shora neomezená” a “posloupnost má limitu nekonečno”.
- Pomocí věty o limitě vybrané podposloupnosti dokažte, že následující posloupnost nemá limitu:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ 5 & \text{pokud } n \text{ je liché.} \end{cases}$$