Matematická analýza I

Cvičení #12 – Aplikace určitého integrálu

Vzorečky

- Má-li f spojitou derivaci na $[a,b]$, potom délka grafu f na $[a,b]$ je $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.
- Pokud těleso V vzniklo rotací grafu spojité nezáporné funkce f kolem osy x na intervalu $[a,b]$, pak objem tělesa V je $\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$.
- Nechť f je nezáporná spojitá funkce na $[a,b]$ a nechť tam má spojitou derivaci. Pak povrch pláště tělesa vzniklého rotací f kolem osy x je $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. (Do pláště nezapočítáváme ty dva případné kruhy na koncích.)

Příklady

1. Spočítejte délky následujících křivek:
   (a) Kružnice s poloměrem r,
   (b) $y = x^{\frac{3}{2}}$ pro $x \in [0,a]$,
   (c) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x)$ pro $x \in [1,e]$.
   (d) křivka daná parametrizací $f(t) = (\frac{t^3}{3}+1, \frac{t^2}{2})$ pro $t \in [0,10]$.
2. Určete objem:
   (a) válce s výškou h a poloměrem podstavy r,
   (b) kužele s výškou h a poloměrem podstavy r,
   (c) koule s poloměrem r,
   (d) nekonečného „trychtýře“ vzniklého rotací grafu $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in [1,\infty)$ kolem osy x.
3. Určete povrch:
   (a) válce s výškou h a poloměrem podstavy r,
   (b) kužele s výškou h a poloměrem podstavy r,
   (c) koule s poloměrem r,
   (d) rotačního tělesa vzniklého rotací oblasti mezi křivkami $f(x) = x$ a $g(x) = 2x$ kolem osy x pro $x \in [0,1]$.
4. Bonus. Spočítejte obsah jednotkového kruhu.
5. Bonus. Spočítjte objemy následujících podmnožin $\mathbb{R}^3$:
   (a) $\{(x,y,z) : x \in [0,1], y \in [0,x], z \in [0,x]\}$,
   (b) $\{(x,y,z) : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$,
   (c) $\{(x,y,z) : x,y,z \geq 0, x+yz \leq 1\}$.