

Matematická analýza I

Cvičení #1 – Základy

Příklady

1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

(a) $x^2 - 2x - 4$ (b) $||x - 1| - 1|$ (c) $\max\{x + 2, 4 - x^2, 1 - 2x\}$

2. Rozhodněte, zda jsou následující průniky prázdné:

(a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$ (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}]$ (c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n})$ (d) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ (e) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

3. Následující výroky zapište pomocí kvantifikátorů a potom je znegujte:

(a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.

(b) Každé prvočíslo je liché.

(c) Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.

(d) Pro každé kladné reálné číslo x existují právě dvě reálná čísla taková, že x je jejich druhou mocninou.

4. Rozhodněte (a dokažte), zda jsou následující čísla racionální či iracionální:

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{576}$ (c) $\sqrt{2048}$

5. Dokažte pro $a, b \in \mathbb{R}$ trojúhelníkovou nerovnost:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

6. Dokažte, že \mathbb{Q} je husté v \mathbb{R} , tedy

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a < b \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})(a < q \wedge q < b)).$$

7. Rozhodněte (a dokažte), zda následující množiny jsou spočetné či nespočetné:

- (a) \mathbb{N}^2 (b) Množina všech konečných podmnožin \mathbb{N} (c) Množina všech podmnožin \mathbb{N}
(d) Množina všech iracionálních čísel (e) Množina všech funkcí $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
(f) Množina všech funkcí $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$