

# Základy kombinatoriky a teorie grafů

## Cvičení #9 – Vytvořující funkce

### Třetí série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **3. 5. 2021**

1. Určete koeficient u členu  $x^{14}$  ve výrazu  $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$ . Vyjádřete jej ve tvaru  $\binom{p}{q}$  pro nějaká přirozená  $p, q$ . [**3 body**]
2. Graf  $G$  má 360 vrcholů a každý jeho vrchol má stupeň 3 nebo 4. Každý vrchol stupně 3 sousedí se dvěma vrcholy stupně 3 a s jedním vrcholem stupně 4. Každý vrchol stupně 4 sousedí s jedním vrcholem stupně 3 a se třemi vrcholy stupně 4. Určete počet hran grafu  $G$ . [**2 body**]
3. Spočítejte počet způsobů, jimiž jde konvexní  $n$ -úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky. (Abychom neměli různé definice: Pro  $n = 4$  je výsledek 2.) Stačí, když najdete rekurenci, nemusíte ji řešit. [**3 body**]
4. Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že každá množina  $N$  bodů v rovině obsahuje buď  $n$  bodů na přímce, anebo  $n$  bodů v obecné poloze (tj. žádné tři na přímce). [**2 body**]
5. Dokažte, že pokud  $m > 2$  a  $p$  je *dostatečně velké* prvočíslo (můžete si zvolit, co znamená dostatečně velké, a může to být v závislosti na  $m$ ), pak existují  $1 \leq a, b, c < p$  taková, že [**6 bodů**]

$$a^m + b^m \equiv c^m \pmod{p}.$$

### Opakování

Tyhle věci jako matematici umíte určitě líp než já. *Vytvořující funkce* pro posloupnost  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  je mocninná řada  $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ . Například  $\frac{1}{1-x}$  je vytvořující funkce pro  $(1, 1, \dots)$  a  $(1+x)^n$  je vytvořující funkce pro  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots)$  (protože pro  $k > n$  platí  $\binom{n}{k} = 0$ ). Pochopitelně, pokud  $a(x)$  konverguje na nějakém okolí nuly, tak je takový přechod mezi formálními mocninnými řadami a skutečnými funkcemi legální, protože všechny členy  $a_i$  nějak odpovídají derivacím v nule. Speciálně pokud existuje  $K$  takové, že  $|a_n| \leq K^n$  pro každé  $n$ , tak má  $a(x)$  nenulový poloměr konvergence.

### Příklady

1. Vyřešte DÚ1.
2. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin — jahodovou, citronovou a čokoládovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři čokoládové kopečky? (Na pořadí kopečků nezáleží.)
3. Nechť  $(a_i), (b_i)$  jsou posloupnosti,  $a(x), b(x)$  jejich vytvořující funkce,  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $k$  přirozené. Vytvořte si tabulku, jakou posloupnost vytváří funkce:  $a(x) + b(x)$ ,  $\alpha a(x)$ ,  $a(\alpha x)$ ,  $x^k a(x)$ ,  $a(x^k)$ ,  $a'(x)$ ,  $\int_0^x a(t) dt$ ,  $a(x)b(x)$  a  $\frac{a(x) - a_0 - a_1x - \dots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$ .
4. Najděte vytvořující funkce (v uzavřeném tvaru) pro následující posloupnosti:  $(0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$ ,  $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$ ,  $(1, 4, 9, 16, \dots)$ ,  $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$  (tj. součty prvních  $i$  kladných sudých čísel).
5. Zjistěte, čemu se rovná  $a_n$ , které je zadané rekurentní rovnicí  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$  pro  $n \geq 0$ .
6. (Tady můžete potřebovat zobecněnou binomickou větu pro neceločíselné exponenty.) Spočítejte, kolik různých dobře uzavřovaných výrazů se dá dostat z  $n$  otevíracích a  $n$  uzavíracích závorek. (Pro  $n = 2$  jsou to  $()()$  a  $(())$ .)