

Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #6 – Rovinné grafy a jejich barevnost

Opakování

Graf G je *rovinný*, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení (tj. nakreslení, kde vrcholy jsou body, hrany jsou křivky spojující vrcholy a hrany se mohou protínat jen ve svých koncových vrcholech). Po odstranění hran se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěnami nakreslení*.

Jako k -obarvení grafu $G = (V, E)$ nazveme funkci $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ takovou, že je-li $uv \in E$, pak $c(u) \neq c(v)$. Barevnost grafu G , značená jako $\chi(G)$, je nejmenší k takové, že pro G existuje k -obarvení.

Věta 1 (Eulerova formule). *Pro nakreslení souvislého rovinného grafu o v vrcholech, e hranách a f stěnách platí $v - e + f = 2$.*

Věta 2 (Kuratowského věta). *Graf je rovinný, právě když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.*

Věta 3 (Věta o 4 barvách). *Je-li G rovinný, pak $\chi(G) \leq 4$.*

Příklady

1. Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.
2. Najděte graf, který lze nakreslit na torus tak, že jeho stěny jsou homeomorfní otevřenému disku, ale také tak, že nějaká jeho stěna otevřenému disku homeomorfní není.
3. *Vnějškově rovinný graf* je takový rovinný graf, který má nakreslení, v němž všechny vrcholy leží na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.
4. Mějme rovinné nakreslení grafu G , v němž jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme navíc, že na každém vrcholu leží buď dort, nebo zmrzlina, anebo lízátko. O stěně řekneme, že je *mňamózní*, pokud na jí příslušících vrcholech najdeme všechny tři dobroty (tj. každou právě jednou). Dokažte, že mňamózních stěn je sudý počet.
5. Ukažte, že má-li rovinný graf všechny stupně sudé, pak jeho duál má barevnost rovnou dvěma.
6. (Nash–Williams theorem.) Ukažte, že hrany každého rovinného grafu jde zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.
7. Dokažte, že $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ ($xy \in E$ právě když $\|x - y\| = 1$).

Když se budete nudit

Zkuste zobecnit Eulerovu větu pro libovolné plochy (doporučuju orientované a neorientované zvlášť). Hint: Bude z ní nerovnost, pro orientované bude na pravé straně $2 - 2g$ (g je genus) a rovnost bude nastávat pro nakreslení, kde je každá stěna homeomorfní otevřenému disku.