Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #5 – Rovinné grafy

Opakování

Graf G je *rovinný*, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení (tj. nakreslení, kde vrcholy jsou body, hrany jsou křivky spojující vrcholy a hrany se mohou protínat jen ve svých koncových vrcholech). Po odstranění hran se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěnami nakreslení.*

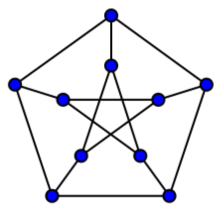
Jako k-*obarvení* grafu $G = (V, E)$ nazveme funkci $c\colon V \to \{1, \dots k\}$ takovou, že je-li $uv \in E$, pak $c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu* G, značená jako $\chi(G)$, je nejmenší k takové, že pro G existuje k-obarvení.

Věta 1 (Eulerova formule)**.** *Pro nakreslení souvislého rovinného grafu o v vrcholech, e hranách a f stěnách platí $v - e + f = 2$.*

Věta 2 (Kuratowského věta)**.** *Graf je rovinný, právě když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.*

Příklady

1. Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.
2. Ukažte, že Petersenův graf není rovinný:



3. Pro dané nakreslení rovinného grafu si jako *hranici* stěny F označíme množinu vrcholů, které s F sousedí. Najděte rovinný graf a dvě jeho nakreslení taková, že množiny hranic jejich stěn nejsou stejné.
4. Nalezněte[1] nakreslení K_5, K_6 a K_7 na torus.
5. Najděte graf, který lze nakreslit na torus tak, že jeho stěny jsou homeomorfní otevřenému disku, ale také tak, že nějaká jeho stěna otevřenému disku homeomorfní není.

Když se budete nudit

Zkuste zobecnit Eulerovu větu pro libovolné plochy (doporučuju orientované a neorientované zvlášť). Hint: Bude z ní nerovnost, pro orientované bude na pravé straně $2 - 2g$ (g je genus) a rovnost bude nastávat pro nakreslení, kde je každá stěna homeomorfní otevřenému disku.

[1] Klidně na internetu.