Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #4 – Hallova věta

Druhá série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **29. 3. 2022**

1.
   (a) Ukažte, že každý strom obsahuje nejvýše jedno perfektní párování. [**2 body**]

   (b) Dokažte, že strom má perfektní párování právě tehdy, když po odebrání libovolného vrcholu má vzniklý les právě jednu lichou komponentu. [**2 body**]

2. Graf G je *kriticky 2-souvislý*, pokud $k_v(G) \geq 2$, ale $k_v(G - e) \leq 1$ pro všechny hrany $e \in E(G)$. Dokažte, že vrcholově 2-souvislý graf je kriticky 2-souvislý právě tehdy, když všechny jeho cykly jsou indukované. Jinak řečeno: Buď $G = (V, E)$ vrcholově 2-souvislý graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní: [**4 body**]

   (a) Pro každé $e \in E$ platí, že $k_v(G - e) \leq 1$,

   (b) Pro každou posloupnost různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takovou, že $v_i v_{i+1} \in E$ pro všechna i ($v_{n+1} = v_1$) platí, že mezi nimi nejsou žádné další hrany.

3. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ obsahuje cesty $u \to v$ i $v \to u$.

   (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$ vychází alespoň jedna hrana do $V \setminus X$. [**1 bod**]

   (b) Ukažte, že turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. orientovanou kružnici, která navštíví každý vrchol právě jednou, kružnice je orientovaná, pokud všechny hrany vedou cyklicky stejným směrem). [**3 body**]

Opakování: Hallova věta

Nechť X a I jsou množiny. *Množinový systém* na X je $|I|$-tice $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. Všimněte si, že se může stát $M_i = M_j$ pro $i \neq j$. *Systém různých reprezentantů* pro $\mathcal{M}$ je **prostá** funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ máme $f(i) \in M_i$. Pokud nebude řečeno jinak, předpokládáme, že $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i jsou konečné.

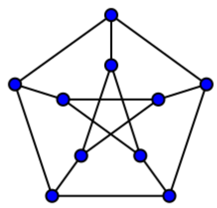
Věta 1 (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ platí následující (Hallova) podmínka*

$$\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| \geq |J|\,.$$

Příklady

1. Buďte rádi, že jsem udělal jen dvě iterace. (Nebo by to moc práce nepřidalo?)
   (a) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1,2,3,4\}$ systém různých reprezentantů?
   (b) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1,2,3,4,5\}$ systém různých reprezentantů?
   (c) (Bonus.) Pro která $k, n \in \mathbb{N}$ má systém všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1,\ldots,n\}$ systém různých reprezentantů?

2. *Párování* v grafu $G = (V, E)$ je množina $F \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ patří do nejvýše jedné hrany z F. *Perfektní párování* je párování F takové, že každý vrchol patří do právě jedné hrany F.
   (a) Najděte 6 různých perfektních párování v Petersenově grafu a dokažte, že zádná další neexistují.



   (b) Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf ($k \geq 1$) má perfektní párování.

3. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ alespoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

4. *Latinský obdélník řádu $k \times n$*, $k \leq n$ je matice $L \in \{1,\ldots,n\}^{k\times n}$, kde se v každém řádku i sloupci vyskytuje každé číslo nejvýše jednou. *Latinský čtverec řádu n* je latinský obdélník řádu $n \times n$. Dokažte, že každý latinský obdélník jde doplnit na latinský čtverec.

5. Dilworthova věta říká, že má-li v konečném částečném uspořádání $(P, \prec)$ nejdelší antiřetězec velikost r, pak lze P rozdělit na r řetězců. Dokažte, že Dilworthova věta implikuje Hallovu větu (přesněji řečeno tu těžší implikaci).

6. Pro $n \times n$ matici A definujeme její *permanent* jako

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

   (a) Buď G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1,\ldots,u_n\}$ a $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ a buď A matice taková, že $a_{ij} = 1$, právě když u_iv_j tvoří hranu G, a $a_{ij} = 0$ jinak. Dokažte, že počet perfektních párování v G je $\mathrm{per}(A)$.
   (b) Nechť A je *bistochastická matice*, tj. nezáporná $n \times n$ matice, v níž se všechny řádkové i sloupcové součty rovnají jedné. Dokažte, že $\mathrm{per}(A) > 0$.