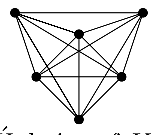
Základy kombinatoriky a teorie grafů

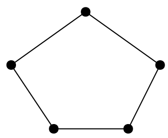
Cvičení #1 – Grafy atd.

Opakování

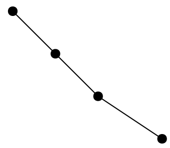
(Neorientovaný) graf G je dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran.



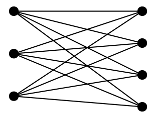
Úplný graf K_n



Cyklus (kružnice) C_n



Cesta P_n



Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

Graf H je *podgraf* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$, značíme $H \subseteq G$. H je *indukovaný podgraf* G, pokud $H \subseteq G$ a navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{H}{2}$.

Stupeň vrcholu v (značíme $\deg_G(v)$) je počet hran G obsahujících v. Graf je souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Doplněk grafu* G (značíme $\bar{G}$) je graf s $V(\bar{G}) = V(G)$ a $E(\bar{G}) = \binom{G}{2} \setminus E(G)$.

Je-li $G = (V, E)$ graf a $T = (V, E')$ *strom* (tj. souvislý graf bez kružnic) takový, že $E' \subseteq E$, je T *kostra grafu* G.

Příklady

1. (*Princip sudosti*:) Pro každý graf $G = (V, E)$ platí
$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$
2. Je-li $G = (V, E)$ souvislý graf s $|V| \geq 2$, pak existují $u \neq v \in V$ takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.
3. Doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. (Platí, že doplněk každého souvislého grafu je nesouvislý?)
4. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně?
5. Kolik nejvíce a nejméně listů může mít strom na n vrcholech, který má stupně pouze 1 a 3?
6. Kolik má $K_{2,n}$ různých koster?
7. Kolik nejméně a nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a právě k komponentami souvislosti?
8. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.
9. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojte graf, který má přesně n automorfismů.