

Matematická analýza I

Třetí série domácích úkolů

Deadline 7. 5. v 9:00. Řešení ve formátu PDF pošlete mailem na matej@kam.mff.cuni.cz. Ideálně \LaTeX , můžete ale použít cokoliv jiného (exportovaného do PDF) včetně scanu ručního řešení. Moc vás ale prosím o dobře čitelná řešení.

Pokud není řečeno jinak, můžete bez důkazu používat všechno, co se říkalo na prvních devíti přednáškách a cvičeních, ale nezapomeňte na pečlivé ověření předpokladů! Můžete spolupracovat a používat všechny dostupné materiály pod podmínkou, že řešení sepíšete úplně sami a všem odevzdaným řešením budete dobře rozumět. Bez důkazu můžete využívat základní limity a derivace.

1. Z definice spočítejte následující derivace (chci, abyste rozepsali definici derivace pomocí limity a tu potom spočítali – na to už můžete použít větu o aritmetice limit a cokoliv dalšího o limitách): [2 body]

(a) $x^2 + 1$ v bodě 3,

(b) $\frac{1}{x-1} + 7$ v bodě 0.

2. Spočítejte derivace následujících funkcí ve všech bodech, kde existují (nemusíte počítat jednostranné derivace v krajních bodech). Součástí toho je samozřejmě určení toho, kde ty derivace existují: [4 body]

(a) $\cos(\sqrt{x-1})$,

(b) $\ln|x|$,

(c) $\frac{2^x x^2}{\sqrt{x^2+1}}$,

(d) $17x^{1234} + 42x^{42} - \pi x^3 + 7 - \frac{1}{x^5}$.

3. Vyšetřete průběh následujících funkcí. To jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity, lokální i globální extrémy a vyšetřete konvexitu. **Také načrtněte graf, jak nejlépe umíte** [3 body]

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$,

(b) $f(x) = x - \sin(x)$,

(c) $(x^2 - 1)e^{-x}$.

Když hledáte nulové body polynomu moc velkého stupně, zkuste WolframAlpha, třeba má nějaké pěkné ;). U druhé úlohy se vám při počítání průsečíků může hodit dokázat si, že pro $x > 0$ je $x > \sin(x)$ a pro $x < 0$ je $x < \sin(x)$.

4. Vypočítejte Taylorův polynom řádu n pro funkci $\frac{2}{1-2x}$ v nule. [2 body]